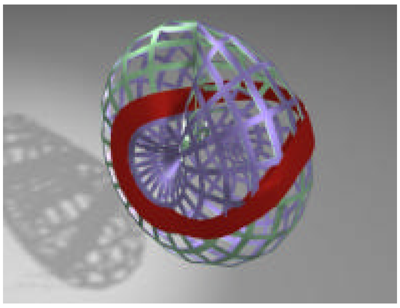
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



FACULTAD DE QUÍMICA

Departamento de Matemáticas

El Campo C

de los Números Complejos

Coautores:

César Alejandro Rincón Orta
Coordinador

(Por orden alfabético)
Alberto Rosas Pérez
Arturo Zentella Dehesa
Carlos Bruno Velarde Velázquez
Eugenio León Fautsch Tapia
Guadalupe Josefina Toledo Macías
Susana Yalu Leticia Rubín Rivero

Publicación autorizada por el Comité Editorial de la Facultad de Química

Cd. Universitaria, D.F.

Teléfono ((55) 56 22 35 34 • Fax ((55) 56 22 37 66

Tabla de contenido

Presentación

De acuerdo con el Programa Editorial de nuestra facultad, un grupo de profesores del Departamento de Matemáticas nos reunimos para elaborar estas notas con las que tratamos de contribuir a remediar las carencias que en el renglón de material didáctico padece la Facultad de Química de la UNAM.

Nuestra intención nunca fue la de escribir un libro de análisis complejo. Simplemente quisimos ayudar a fijar un marco de referencia que establezca la extensión y profundidad con que se pretende cubrir uno de los temas centrales de nuestro programa de álgebra, y con este propósito solamente tratamos los temas básicos indispensables para el estudio de la teoría de los polinomios y de las ecuaciones con una breve ampliación a las funciones trascendentes complejas.

Cuando se estudian curvas algebraicas, resulta conveniente considerarlas inmersas en un campo en el que la intersección de cualesquiera dos de ellas de grados n y m respectivamente, conste precisamente de n m puntos y esto requiere que en este campo, todo polinomio tenga en él un juego completo de raíces.

Los campos que tienen la propiedad de tener a todas las raíces de sus polinomios, se llaman “algebraicamente cerrados” y el teorema fundamental del álgebra garantiza que C tiene esta característica. Esto lo convierte en un hábitat natural para el estudio de la geometría algebraica y por supuesto de la antes mencionada teoría de las ecuaciones. El electromagnetismo y el reciente estudio de los conjuntos de Mandelbrot y la clasificación de los fractales complejos, muestran otras aplicaciones de nuestro campo cuya estructura básica presentamos en estas notas sin otra pretensión que la ya expuesta.

Capítulo

1

El Campo C de los Números Complejos

Una característica importante del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es que tiene una clase positiva $\mathbb{R}^+$, que define al orden canónico en $\mathbb{R}$ que por ser compatible con las operaciones tiene, entre otras, la propiedad de que para toda a diferente de cero, a^2 es un positivo y por lo tanto la ecuación $x^2+1=0$ no puede tener solución en $\mathbb{R}$. Como en otros casos —construcciones de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$— se pensó en extender $\mathbb{R}$ a un campo más grande, en el que la mencionada ecuación pudiera resolverse.

Era necesario construir un campo en el que existiera un número —imaginario— "i" que satisficiera la ecuación $x^2+1=0$, que fuera una extensión de $\mathbb{R}$ y, por supuesto, que resultara el más "económico" —en el sentido de la contención— con esas propiedades.

En la época en que surgió este problema no se conocía el teorema que asegura que para todo campo K y todo polinomio $f(x)$ no constante, con coeficientes en K, existe una extensión de K en la que el polinomio tiene al menos una raíz, teorema que valida la construcción, que resulta más natural y que la hubiera librado de las objeciones —injustificadas— que en su momento se hicieron y que se referían al invento de los números imaginarios.

Es pertinente observar que en el campo cuya construcción se deseaba, no puede haber una relación de orden compatible con las operaciones, —que es la única que interesa al álgebra— ya que en ese caso, como en el de los reales, los cuadrados tendrían que ser no negativos. Por esta razón, algunos autores que enfatizan la propiedad, dicen que $\mathbb{C}$ es el "desordenado" campo de los números complejos, a pesar de que como una consecuencia del axioma de selección resulta que en todo conjunto se puede definir un buen orden. Lo que no puede asegurarse es que ese orden resulte compatible con las operaciones.

Puestos a estudiar ese hipotético campo en el que figura esa misteriosa i, se vio que tenían que estar también todas sus potencias $(i^2, i^3, \ldots)$, productos de éstas por números reales y sumas de tales productos, es decir que debían estar consideradas todas las expresiones de la forma

$$a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \ldots + a_n i^n \quad a_j \in \mathbb{R} \quad j = 0,1,\ldots,n \qquad (*)$$

además de sus inversos multiplicativos. Se notó que como:

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-i)\ i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

si n es un número natural tal que, $n = 4q + r \quad 0 \le r < 4$,

$i^n = \left(i^4\right)^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$

O sea, i^n es 1, i, -1 ó $-i$ observación que permite simplificar las expresiones (*) que pueden reducirse a binomios de la forma $a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

1. $3 + 2i - 7i^2 + 2i^3 - i^4 + 7i^5 = 3 + 2i - 7(-1) + 2(-i) - 1 + 7i = 9 + 7i$
2. $1 + i^3 + i^{37} - i^{204} = 1 - i + i - 1 = 0$

Ejercicios

Exprese en la forma $a + bi$:

1. $2-8i+7i^3-3i^7+16i^{20}$
2. $\left(2i^3\right)^5$
3. $\dfrac{(2-7i)^2}{1+3i-2i^2+i^3+2i^7}$

Tomando en cuenta lo anterior, procedieron a estudiar al subconjunto b formado por los elementos del nuevo campo que pueden expresarse como binomios. Es decir:

$$b=\left\{\ a+bi\in C;\ a,b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\ \right\}$$

Como siempre que se define un conjunto nombrando a sus elementos, es conveniente aportar un criterio que permita decidir cuando dos nombres corresponden al mismo individuo. Hacemos notar que, puesto que se trata de un campo, $a+bi=c+di\Rightarrow(a-c)=(b-d)i$ y que por lo tanto $(a-c)^2=-(d-b)^2$ que es una igualdad en $\Re$ que implica que cada cuadrado debe ser —necesariamente— 0 y por lo tanto $a=c$ y $b=d$. Es decir que en b cada elemento tiene una representación única. Así por ejemplo si supiéramos que $i=u+vi$, sabríamos que $u=0$ y $v=1$.

Como b es subconjunto de un campo, $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$, de donde resulta que la adición —en $\mathbb{C}$— de elementos de b, produce un elemento de b (b es cerrado bajo la adición de $\mathbb{C}$) y por lo tanto la restricción de ésta a $b\times b$ es una operación binaria en b que, por herencia, resulta asociativa y conmutativa. $0=0+0i$ está en b y para cada $a+bi\in b$ $(-a)+(-b)\ i$, el inverso aditivo de $a+bi$, también es un elemento de b, luego $\{b,+\}$ es un grupo abeliano.

Ejemplos

1. $(3+4i)+(6+5i)=(3+6)+(4+5)\ i=9+9i$
2. $(6-14i)-(-10+17i)=16-31i$

Ejercicios

Exprese el resultado de las operaciones siguientes en la forma $a+bi$.

1. $(5+7i)+(8+2i)$
2. $(5+7i)-(8+2i)$
3. $(11+2i)+(3-14i)$
4. $(19-i)-(2-13i)$
5. $(15+2i)-(6+4i)$
6. $(\sqrt{2}+i\sqrt{3})-(6\sqrt{2}-7\sqrt{3}\,i)$
7. $(19-i)+(2-12i)$
8. $[(2+6i)+(6-5i)]-(4-11i)$
9. $(-6+4i)-[(18-6i)-(-7-2i)]$
10. $\left(1+i\sqrt{3}\right)-\left(7+2\sqrt{3}i\right)+\left(7-\sqrt{3}i\right)$

El producto —en $\mathbb{C}$— de dos elementos de b, está en b. En efecto, $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$, y por lo tanto, b tiene también una multiplicación que por ser la restricción de la de un campo, es asociativa, conmutativa, tiene idéntico $(1=1+0i)$ y se distribuye sobre la suma por ambos lados.

Ejemplos

1. $(6+3i)(2+4i)=(12-12)+(6+24)\,i=30i$
2. $\left(2+i\sqrt{3}\right)\left(5-6\sqrt{3}i\right)=(10+18)+\left(5\sqrt{3}-12\sqrt{3}\right)i=28-7\sqrt{3}i$

Finalmente, si $a+bi\in b$ y es $a+bi\neq 0+0i$, ($a\neq 0$ ó $b\neq 0$ y por lo tanto $a^2+b^2>0$),

$$(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-bi}{a^2+b^2}$$

como puede comprobarse efectuando el producto $(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-bi}{a^2+b^2}\right)$ por lo que resulta que b es un campo.

Para ver cómo se obtiene el inverso multiplicativo de $a+bi$, consideremos un número $x+yi$ tal que multiplicado por $a+bi$ nos dé $1+0i$, es decir:

$$(x+yi)(a+bi)=1+0i$$

efectuando la multiplicación:

$$(ax-by)+(ay+bx)i=1+0i$$

de donde:

$$\begin{aligned} ax-by&=1\\ bx+ay&=0 \end{aligned}$$

Como $a+bi\neq 0$, $a\neq 0$ ó $b\neq 0$ y por lo tanto $a^2+b^2>0$, por lo que, aplicando la regla de Cramer se obtiene

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -b\\ 0 & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & -b\\ b & a\end{vmatrix}}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a & 1\\ b & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & -b\\ b & a\end{vmatrix}}=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

es decir

$$(a-bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-bi}{a^2+b^2}$$

Consideremos el ejemplo siguiente:

Se desea encontrar $(3+4i)^{-1}$, que de acuerdo con lo anterior resulta $3/25-4i/25$, y comprobamos:

$$(3+4i)(3/25-4i/25)=(9/25+16/25)+(12/25-12/25)i=1$$

Definamos el conjugado de un número complejo $z=a+bi$ como $\bar{z}=a-bi$.

Así, si $z=3+4i$, su conjugado $\bar{z}=3-4i$, y entonces, recordando que la expresión a/b representa al producto de a por el inverso de b, ($a/b=ab^{-1}$), encontramos que para efectuar la división de z entre w, basta multiplicar el cociente z/w por $\overline{w}/\overline{w}$, con lo que se obtiene el resultado deseado.

Ejemplo

Dividir $(2-i)$ entre $(1+i)$

$$\frac{2-i}{1+i}=\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-3i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

En efecto, $(1+i)(1/2-3i/2)=(1/2+3/2)+(1/2-3/2)i=(2-i)$

Ejemplos

1. $\dfrac{6+7i}{4-3i}$ multiplicamos por $\dfrac{4+3i}{4+3i}$

$$\frac{z}{w}\cdot\frac{\overline{w}}{\overline{w}}=\frac{(6+7i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{(24-21)+(28+18)i}{16+9}=\frac{3+46i}{25}=\frac{1}{25}(3+46i)$$

2. $\dfrac{z}{w}=\dfrac{\sqrt{7}+i\sqrt{5}}{\sqrt{5}+i\sqrt{7}}$

$$\frac{z}{w}\cdot\frac{\overline{w}}{\overline{w}}=\frac{(\sqrt{7}+i\sqrt{5})(\sqrt{5}-i\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+i\sqrt{7})(\sqrt{5}-i\sqrt{7})}=\frac{(\sqrt{35}+\sqrt{35})+(5-7)i}{5+7}=\frac{2\sqrt{35}-2i}{12}=\frac{1}{6}(\sqrt{35}-i)$$

Ejercicios

Exprese en la forma $a+bi$ el resultado de las siguientes operaciones:

1. $(9+8i)\ (7-6i)$
2. $(6+3i)\ (2+5i)$
3. $(6-3i)(2+5i)$

4. $(6-3i)(2-5i)$

5. $(-6+3i)(2-5i)$

6. $(5-3i)(7-2i)$

7. $(7\sqrt{2}-6\sqrt{5}i)(2\sqrt{2}-7\sqrt{5}i)$

8. $(3+2\boldsymbol{i})[(7-8\boldsymbol{i})(-2+9\boldsymbol{i})]$

9. $(5+3i)^2$

10. $(3-2i)^3$

11. $(8-3i)\div(9+4i)$

12. $(2-11i)\div(3-2i)$

13. $5i\div(6-7i)$

14. $(\sqrt{3}-i\sqrt{7})\div(2\sqrt{3}+3\sqrt{7}i)$

15. $(8\sqrt{5}+21\sqrt{3}i)\div(2\sqrt{5}-7\sqrt{3}i)$

16. $(\sqrt{6}+6\sqrt{10}i)\div(2\sqrt{6}-3\sqrt{10i})$

17. $(2+3i)(3-4i)\div(4+5i)$

18. $(5+6i)^2\div(9-2i)$

19. $(-5+8i)\div(3+2i)^2$

20. $\dfrac{8+7i}{(5+6i)(5-2i)}$

21. $\dfrac{(10i-3)(4i+3)}{9i-8}$

22. $\dfrac{(1+2i)(2+3i)}{(3+4i)(4+5i)}$

23. $\dfrac{(3-5i)(7+4i)}{(5+3i)(6-i)}$

La inmersión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

Cada número real $a = a + 0i$ está en b, así como $i = 0 + 1i$. Obviamente, b es el menor campo en el sentido de la contención con esas dos propiedades. Luego $b = \mathbb{C}$ es el campo que se deseaba construir.

Con objeto de contestar las objeciones que se hicieron a la construcción anterior —la existencia de números imaginarios— Gauss, tomando como base los resultados anteriores, propuso el siguiente modelo:

Sea $C = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

Definiciones

1. $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c,\ b = d$ (representación única)
2. $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$ (la suma dentro del último paréntesis es la de $\mathbb{R}$
3. $(a,b) \otimes (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$

y con esto se pudo demostrar que $\{C,\oplus,\otimes,\Theta,e\}$ es un campo, en el cual

$$\Theta = (0,0), \qquad -(a,b) = (-a,-b), \qquad e = (1,0)$$

y si

$$z = (a,b) \text{ es } z \neq \Theta,$$

entonces

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) (z \neq \Theta \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0).$$

En este modelo se acostumbra llamar a la primera componente de cada pareja la parte real y a la segunda, la imaginaria —Nótese que ambas partes son números reales— así si $z = (a,b)$ es un complejo, $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$ y esta costumbre queda justificada con la inmersión $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $f(a) = (a,0)$.

(Recuerde que una inmersión de una estructura en otra es una función inyectiva que "respeta" las relaciones de ambas. Explícitamente, f debe ser inyectiva y $\forall a,b \in \mathbb{R}$,

$$f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$$
$$f(ab) = f(a) \otimes f(b)$$

en donde – por supuesto – las operaciones de la izquierda de las igualdades son operaciones en $\mathbb{R}$ y las de la derecha, en $\mathbb{C}$).

En vista de que las operaciones de las parejas —adición y multiplicación— se definieron tomando como modelo las de los binomios, estas nuevas operaciones tienen —necesariamente— las propiedades de las anteriores y, por lo tanto, $\mathbb{C} = \{\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}, \oplus, \otimes\}$ resulta un campo, como puede comprobarse fácilmente. La inmersión $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida $f(a) = (a,0)$ muestra que puede considerarse $\mathbb{C}$ como una extensión de campo de $\mathbb{R}$ y bautizando i como $i = (0,1)$ e identificando a con $f(a) = (a,0)$, puede verse que :

1. $i^2 = (0,1) \otimes (0,1) = (-1,0) = -1$
2. $(a,b) = (a,0) \oplus (0,b) = (a,0) \oplus [(b,0) \otimes (0,1)] = a + bi$

Con lo que se recuperan los binomios de los que se partió como base en la construcción de Gauss.

La construcción del inverso multiplicativo de un complejo (a,b) no cero, $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$ mostró la conveniencia de definir dos funciones $f : C \to C,\ g : C \to \mathbb{R}$ por medio de las formulas:

$$f((a,b)) = (a,-b) \qquad \text{la conjugación}$$
$$g((a,b)) = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{el módulo o tamaño}$$

La Conjugación

Si $z = (a,b),\ \bar{z} = f(z) = (a,-b)$

(Cuando se identifican los complejos como puntos del plano coordenado $\mathbb{R}^2$, es decir, cuando $z = (a,b)$ es el punto de abscisa a y de ordenada b, la conjugación puede interpretarse geométricamente como la reflexión sobre el eje X).

La conjugación tiene, entre otras, las propiedades que expresa el siguiente :

Teorema $\forall z, w \in C$,

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ "El conjugado de la suma es la suma de los conjugados".
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ "El conjugado de un producto es el producto de los conjugados".
3. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
4. $\overline{\overline{z}} = z$
5. $\overline{z} = \overline{w} \Leftrightarrow z = w$
6. $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z \qquad z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$

Demostración

Sean $z = (a,b),\ w = (c,d)$

1. $\overline{z+w} = \overline{(a+c, b+d)} = ((a+c), -(b+d)) = (a,-b) + (c,-d) = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{(ac-bd, ad+bc)} = (ac-bd, -(ad+bd)) = (a,-b)(c,-d) = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \therefore \overline{z} = (a,-0) = (a,0) = z$
4. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(a,b)}} = \overline{(a,-b)} = (a,b) = z$
5. $z + \overline{z} = 2a = 2\operatorname{Re} z \qquad z - \overline{z} = 2bi = 2i \operatorname{Im} z$

Corolarios

(de 4) puesto que la conjugación es auto-inversa, resulta biyectiva.

(de 2) si w es $w \neq 0$, $\overline{(z/w)} = \overline{z}/\overline{w}$.

En efecto, $z = (z/w) \cdot w \ \therefore\ \overline{z} = \overline{((z/w) \cdot w)} = \overline{(z/w)} \cdot \overline{w}$ y por lo tanto $\overline{z}/\overline{w} = \overline{(z/w)}$ (Nótese que $w \neq 0 \Rightarrow \overline{w} \neq 0$).

Cuando se interpreta la conjugación como una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, el teorema prueba que f es una función biyectiva que "va bien" con las operaciones de $\mathbb{C}$ y que "deja fijo" a $\mathbb{R}$, en el sentido de la parte 3 del teorema[1].

Teorema Si $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es un automorfismo que deja fijo a $\mathbb{R}$, $(h(a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R})$, entonces h es la conjugación o la identidad en $\mathbb{C}$.

[1] Las funciones biyectivas que respetan las operaciones se llaman ISOMORFISMOS y cuando "van" de un campo en él mismo, se conocen como AUTOMORFISMOS.

Demostración

Sea $z=(a,b)=a+bi$.

Entonces $h(z)=h(a+bi)=h(a)+h(b)h(i)=a+bh(i)$ (*)

$(a,b\in\Re \Rightarrow h(a)=a,\ h(b)=b)$.

Además, $-1=h(-1)=h(i\cdot i)=h^2(i)$ y por lo tanto $h(i)$ tiene que ser una raíz cuadrada de -1, o sea, $h(i)=i$ ó $h(i)=-i$.

Si $h(i)=i$, (*) muestra que h es la identidad en $\mathbb{C}$ y si $h(i)=-i$, h es la conjugación.

Ejemplos

Se desea calcular z si $: iz+(2-i)\overline{z}=10+6i$

Entonces $z=x+yi,\qquad \overline{z}=x-yi$

$\therefore\quad iz+(2-i)\overline{z}=i(x+yi)+(2-i)(x-yi)=(2x-2y)-2yi$

$(2x-2y)-2yi=10+6i \Rightarrow -2y=6, 2x-2y=10$

$\therefore\quad x=2, y=-3$

Comprobación $i(2-3i)+(2-i)\overline{(2-3i)}=3+2i+7+4i=10+6i$

Ejercicios

Resuelva:

1. $(1+i)z+(1-i)\overline{z}=4$
2. $z\overline{z}+3(z+\overline{z})=7$ ó, ¿no tiene solución?
3. iz+(1+i)w=3+i
4. $(1+i)\overline{z}-(6+i)\overline{w}=4$

La Norma

Si $z=(a,b)$ es un número complejo, se define su norma $\|z\|$ como $\|z\|=g(z)=(a^2+b^2)^{1/2}$. (Aquí también, si se identifican los complejos como puntos del plano, la norma —o tamaño— de z puede interpretarse como la distancia euclidiana de (a,b) al origen).

La función distancia tiene, entre otras, las propiedades que están enumeradas en el siguiente:

Teorema $\forall z, w \in \mathbb{C}$,

1. $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$

2. $|z| \geq 0; \qquad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

3. $|zw| = |z||w|$

4. $|z + w| \leq |z| + |w|$

Demostración

1. $(z\bar{z})^{1/2} = [(a,b)(a,-b)]^{1/2} = (a^2 + b^2)^{1/2} = |z|$

2. Obvia, ya que el tamaño de z es la raíz cuadrada de un número no negativo, y ésta sólo es cero si el radicando $(a^2 + b^2)$ lo es.

3. $|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\bar{z} \cdot w\bar{w} = |z|^2|w|^2$ y como los tamaños son números reales, "se vale" extraer raíces cuadradas. Luego $|zw| = |z||w|$.

4. Nótese que $\forall z, |z| = |\bar{z}|$ y que $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$; $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

   $|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} =$

   $= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 =$

   $= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$ que es una desigualdad de número reales no negativos.

   Por tanto $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Corolarios (de 3) si $t \in \mathbb{R}, |t| = (t\,\bar{t})^{1/2} = (t^2)^{1/2} = |t| \qquad \therefore \qquad |t\,z| = |t||z|$.

En particular, si $t = -1$, $|-z| = |z|$.

Una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ con las propiedades $2,3$ y 4 del teorema anterior, se llama una NORMA, y permite definir la distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^2$, en este caso dos complejos z,w, como sigue:

Def: $\forall z,w \in \mathbb{C}$, $d(z,w) = \|z-w\|$

De la definición y de las propiedades de la norma, se deducen las propiedades siguientes que confieren a d la categoría de MÉTRICA.

Teorema $\forall z, y, w \in \mathbb{C}$,

1. $d(z,w) \geq 0$; $d(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w$
2. $d(z,w) = d(w,z)$
3. $d(z,w) \leq d(z,y) + d(y,w)$

En efecto:

1. $\|z-w\| \geq 0$; $\|z-w\| = 0 \Leftrightarrow z - w = 0 \quad \therefore \quad z = w$
2. $\|z-w\| = \|w-z\|$
3. $\|z-w\| = \|z-y+y-w\| \leq \|z-y\| + \|y-w\|$ (De las propiedades consignadas en los corolarios).

La Ecuación General de Segundo Grado

Un teorema cuya importancia le ha valido el nombre de TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA, —cuya demostración se sale del nivel de estas notas—, asegura que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, es decir que todo polinomio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado n, tiene n raíces —bien contadas— en $\mathbb{C}$[§]. Sin embargo vale la pena demostrar la existencia de algunas de éstas. En particular las raíces cuadradas que deben calcularse cuando se usa la fórmula para resolver la ecuación general de segundo grado. Veamos:

[§] La demostración de este teorema dentro del análisis complejo es tan elegante —corta— que justifica plenamente que se posponga ésta que a este nivel resulta complicada y larga y que por descansar —necesariamente— en alguna construcción de $\mathbb{R}$, no puede ser algebraica pura.

Se desea resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, en donde $a,b,c \in C, a \neq 0$

1. Dividimos la ecuación entre a $(a \neq 0)$ y restamos c/a de cada lado

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

2. Completamos el trinomio cuadrado perfecto por la izquierda, sumando a cada lado

$$\frac{b^2}{4a^2}: \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

o sea:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

3. Suponiendo que se puede sacar raíz cuadrada a $b^2 - 4ac$ y que la representamos

como: $\sqrt{b^2 - 4ac}$, $\qquad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

En donde el doble signo expresa el hecho de que para el caso sirve tanto la raíz cuadrada de $b^2 - 4ac$ cuya existencia supusimos, como su inverso.

4. Finalmente, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Queda por justificar la antes mencionada existencia de las raíces cuadradas de $b^2 - 4ac$, que es lo que afirma el teorema siguiente:

Teorema Para cada complejo $z = a + bi$ diferente de cero, existen (exactamente) dos raíces cuadradas complejas, (una inversa aditiva de la otra).

Demostración

Supongamos que $w = x + yi$ es tal que $w^2 = z$.

Entonces

$$(x + yi)(x + yi) = x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \qquad \therefore \qquad x^2 - y^2 = a$$

$$2xy = b$$

Elevando al cuadrado cada ecuación y sumando:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = a^2$$
$$4x^2y^2 = b^2$$
$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + b^2 \qquad \therefore \qquad \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 + b^2$$

Entonces

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (= \|z\|)$$
$$x^2 - y^2 = a \qquad (= \operatorname{Re} z)$$
$$\therefore x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \qquad y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}$$

y como $\sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|$, cada una de las expresiones de la derecha en estas igualdades tiene raíces cuadradas (reales) de donde resulta que

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

Para seleccionar la pareja de raíces que satisface nuestro problema —producir una raíz cuadrada de z— debe tenerse en cuenta que como $2xy = b$, si $b > 0$ deben escogerse x e y signos iguales (ambos positivos o ambos negativos) y si $b < 0$, x e y deben tener signos diferentes.

Ejemplo

Se desea encontrar las raíces cuadradas de $5 - 12i$, entonces si $w = x + yi$ es una de ellas:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$
$$x^2 - y^2 = 5$$

Entonces $\qquad x^2 = 9 \qquad x = \pm 3$

$$y^2 = 4, \qquad y = \pm 2$$

y como b es menor que cero, x e y deben escogerse con signos diferentes.

Entonces $w_1 = 3 - 2i$, $\qquad w_2 = -3 + 2i$ son las raíces cuadradas de z.

Ejemplo

Se desea obtener las raíces de la siguiente ecuación: $z^2 - 3z + 3 - i = 0$

Entonces: $a = 1,\quad b = -3,\quad c = 3 - i,$

y por lo tanto,

$$b^2 = 9$$

$$-4ac = -4(1)(3-i) = -12 + 4i \quad ; \quad b_2 - 4ac = -3 + 4i$$

Como se va a requerir obtener $\sqrt{b^2 - 4ac}$,

Necesitamos $x + yi$ tal que

$$(x+yi)^2 = b^2 - 4ac = -3 + 4i$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = 5$$

$$x^2 - y^2 = -3$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{\frac{5-3}{2}} = \pm 1 \qquad y = \sqrt{\frac{5+3}{2}} = \pm 2$$

como $2xy = 4$ los signos deben escogerse iguales.

Entonces

$$\therefore \quad 1 + 2i \quad y \quad -1 - 2i$$

Finalmente,

$$z = \frac{3 \pm (1 + 2i)}{2}$$

$$z_1 = 2 + i$$

$$z_2 = 1 - i$$

Comprobación (sólo se hará para z_1)

$$(2+i)^2 - 3(2+i) + 3 - i = 3 + 4i - 6 - 3i + 3 - i = (6-6) + (4-4)i = 0$$

Ejemplo

$$z^2 - 2iz - 9 - 6i = 0 \qquad a = 1 \qquad b = \text{-}2i \qquad c = -9 - 6i$$

$$b^2 - 4ac = -4 + 36 + 24i = 32 + 24i$$

debe obtenerse $\sqrt{32 + 24i} = x + yi$

de manera que

$$x^2 + y^2 = 40, \qquad 2xy = 24 \qquad \text{signos iguales}$$
$$x^2 - y^2 = 32$$
$$x = \pm 6, \qquad y = \pm 2 \quad \therefore \quad \text{raíces} \quad 6+2i \quad \text{e} \quad -6-2i$$

de donde regresando a nuestra ecuación

$$z = \frac{2i \pm (6+2i)}{2}$$
$$z_1 = \frac{2i+6+2i}{2} = 3+2i$$
$$z_2 = \frac{2i-6-2i}{2} = -3$$

Comprobación para (-3)

$$(-3)^2 - 2i(-3) - 9 - 6i = 9 + 6i - 9 - 6i = 0$$

Para $(3+2i)$

$$(3+2i)^2 - 2i(3+2i) - 9 - 6i = 9 - 4 + 12i - 6i + 4 - 9 - 6i = 5 + 4 - 9 + 12i - 12i = 0$$

Ojo: También puede comprobarse notando que la suma de las raíces debe ser $r_1 + r_2 = -b$ y su producto $r_1 r_2 = c$. En efecto, si r_1 y r_2 son raíces de $x^2 + bx + c = 0$, se tiene que

$$x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)$$
$$= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$$

o sea, $r_1 + r_2 = -b$

$$r_1 r_2 = c$$

Ejercicio: Haga esta comprobación en los ejemplos anteriores.

Ejercicios

Encuentre las raíces cuadradas de:

1. $z = 1 - \sqrt{3}i$
2. $z = -1 - \sqrt{3}i$
3. $z = 2i$
4. $z = -16$
5. $z = -2i$
6. $z = -4$
7. $z = 24 - 10i$
8. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

9. $z=-8i$

10. $z=5-12i$

11. $z=3-4i$

12. $z=3+4i$

13. $z=-3+4i$

14. $z=-3-4i$

15. $z=12+5i$

16. $z=15+8i$

17. $z=-40+42i$

Resuelva las ecuaciones siguientes:

18. $z^2-3z+3-i=0$

19. $z^2-2iz-9-6i=0$

20. $z^2-3(1+i)z+5i=0$

21. $(1+i)z^2+(1+2i)z-2=0$

22. $z^2-2iz+1=0$

23. $-5x^2+\sqrt{2}x-1=0$

24. $z^2-(4+i)z+5-i=0$

25. $z^2-(5-3i)z+2-6i=0$

26. $z^2+(2-3i)z-(5+5i)=0$

27. $z^6+z^3+1=0$

Sistemas de Ecuaciones

i) Se desea resolver el sistema:

$$iz+(1+i)w=3i$$
$$(1+i)\overline{z}-(6+i)\overline{w}=-12+3i$$

Observamos que las incógnitas de las segunda ecuación son las conjugadas de la primera, por lo que la conjugamos, con lo que el sistema queda:

$$iz + (1+i)w = 3i$$
$$(1-i)z - (6-i)w = -12-3i$$

y procediendo por suma y resta:

$$\begin{aligned} (1-i)iz + (1-i)(1+i)w &= (1-i)3i \\ -i(1-i)z - (-i)(6-i)w &= -i(-12-3i) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i(1-i)z \quad\quad + 2w &= 3+3i \\ -i(1-i)z + (1+6i)w &= -3+12i \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(3+6i)w = 15i \quad \therefore (1+2i)w = 5i \quad \therefore w = \frac{5i(1-2i)}{5} = 2+i$$

y sustituyendo en la primer ecuación,

$$iz + (1+i)(2+i) = 3i$$
$$iz + 1 + 3i = 3i$$
$$iz = -1 \quad ; \quad z = \frac{-1}{i} = i$$

Comprobamos:

$$i(i) + (1+i)(2+i) = -1+1+3i = 3i$$
$$(1+i)\bar{i} - (6+i)\overline{(2+i)} = 1-i-13+4i = -12+3i$$

ii) Se desea resolver el sistema:

$$iz + 2w = 3+4i$$
$$2z - iw = 5-3i$$

Calcúlese:

$$\Delta = \begin{vmatrix} i & 2 \\ 2 & -i \end{vmatrix} = -3 \qquad \text{Por lo tanto el sistema tiene solución única}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3+4i & 2 \\ 5-3i & -i \end{vmatrix} = -6+3i \qquad \therefore z = \frac{-6+3i}{-3} = 2-i$$

$$\Delta_w = \begin{vmatrix} i & 3+4i \\ 2 & 5-3i \end{vmatrix} = -3-3i \qquad \therefore w = \frac{-3-3i}{-3} = 1+i$$

Comprobación:

$$i(2-i) + 2(1+i) = 3+4i$$
$$2(2-i) - i(1+i) = 5-3i$$

Ejemplo

iii) Se desea resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 + 2i \\ x + 2y - 2z &= -4 - 2i \\ 2x - 2y - z &= -5 + 5i \end{aligned}$$

Indicaremos las operaciones usando:

R_2' (léase el nuevo renglón 2)

$R_2 - R_1$ (léase renglón 2 menos renglón 1)

La matriz aumentada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4+2i \\ 1 & 2 & -2 & -4-2i \\ 2 & -2 & -1 & -5+5i \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2' = R_2 - R_1 \\ R_3' = R_3 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4+2i \\ 0 & 1 & -3 & -8-4i \\ 0 & -4 & -3 & -13+i \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1' = R_1 - R_2 \\ R_3' = \dfrac{R_3 + 4R_2}{-15} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 12+6i \\ 0 & 1 & -3 & -8-4i \\ 0 & 0 & 1 & 3+i \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1' = R_1 - 4R_3 \\ R_2' = R_2 + 3R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 1 & 3+i \end{array}\right)$$

Comprobamos:

$$\begin{aligned} &2i + 1 - i + 3 + i = 4 + 2i \\ &2i + 2(1-i) - 2(3+i) = 2i + 2 - 2i - 6 - 2i = -4 - 2i \\ &2(2i) - 2(1-i) - (3+i) = 4i - 2 + 2i - 3 - i = -5 + 5i \end{aligned}$$

Ejercicios

Resuelva:

1. $z\bar{z} - 3(z + \bar{z}) = i$
2. $2z + z - \bar{z} = 4 - 2i$
3. $\begin{cases} 2z + 3w = 10 - 5i \\ \bar{z} - 6w = -(37/2) + i \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3z + w = 4 + 2i \\ 2z - iw = 3 + 2i \end{cases}$

5. $\begin{cases} (1+i)z+(1-i)w=0 \\ (1-i)z+(1+i)w=4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 6+4i \\ iz_1 + (1+i)z_2 + (1-i)z_3 = 7+4i \\ z_1 + iz_2 - z_3 = 2i \end{cases}$

7. $\begin{cases} z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 1-2i \\ 4z_1 + 5z_2 + 6z_3 = 2+i \\ 7z_1 + 8z_2 + 9z_3 = 3+4i \end{cases}$

Representación Geométrica de los Números Complejos

Tal como se ha mencionado en párrafos anteriores, todo número complejo $a+bi$ puede hacerse corresponder con el punto del plano cuyas coordenadas son a y b. Cuando se usa esta representación, el eje X se conoce como el eje real y el eje Y es el imaginario. Cada número complejo z puede considerarse como la suma $a+bi$, la pareja (a,b), el punto del plano $P=(a,b)$, o el vector apoyado en el origen de extremo P, y si la longitud del segmento $\overline{OP}$ es r y el ángulo que forma $\overline{OP}$ con el eje real es q, el complejo z puede expresarse también en coordenadas polares (r,q), en donde, por supuesto, $a = r\cos q$ y $b = r \operatorname{sen} q$. El cambio inverso —rectangulares a polares— está dado por las relaciones:

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$q = \begin{cases} \arctan(b/a) \ \text{ si } \ a \neq 0 \\ p/2 \ \text{ si } \ a=0,\ b>0 \\ -p/2 \ \text{ si } \ a=0,\ b<0 \\ \text{no definido si } a=b=0 \end{cases}$$

Equivalentemente, se define el “argumento” q de z como el ángulo cuyo coseno es $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y cuyo seno es $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

θ no está definido si $a^2+b^2=0$, es decir si $z=0$.

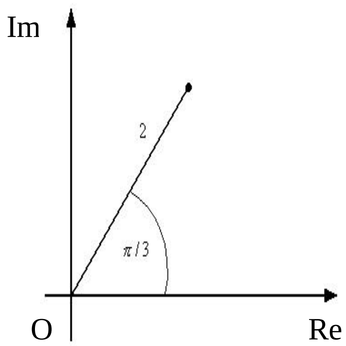
Puede verse que esta manera de definir el argumento de z, permite la posibilidad de que dos ángulos θ_1 y θ_2 sean argumentos de z si θ_1 y θ_2 difieren en un múltiplo entero de 2π y sólo entonces (ver "argumento de un número complejo" más adelante), observación que resultará conveniente en lo que sigue. $(\cos\theta_1=\cos\theta_2 \text{ y } \operatorname{sen}\theta_1=\operatorname{sen}\theta_2 \Leftrightarrow \theta_2=\theta_1+2\pi k, k\in\mathbb{Z})$.

Ejemplo

Pasar de coordenadas rectangulares a forma polar.

Considérese el vector (en el plano) de módulo 2 y argumento $\pi/3$, y calculemos sus formas rectangular y polar.

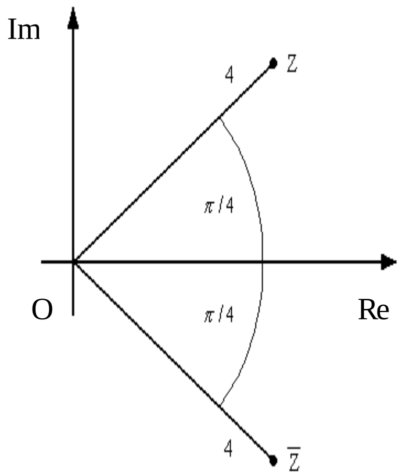
(Se sugiere comenzar dibujando el vector de que se trate)



Entonces sus coordenadas rectangulares son 1 y $\sqrt{3}$. Por lo tanto su forma rectángula es $1+\sqrt{3}\,i$ y su forma polar es $2\operatorname{cis}\pi/3$ ó $2\operatorname{cis}60°$. NOTA ($\operatorname{cis}\theta\equiv\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$)

Ejemplo

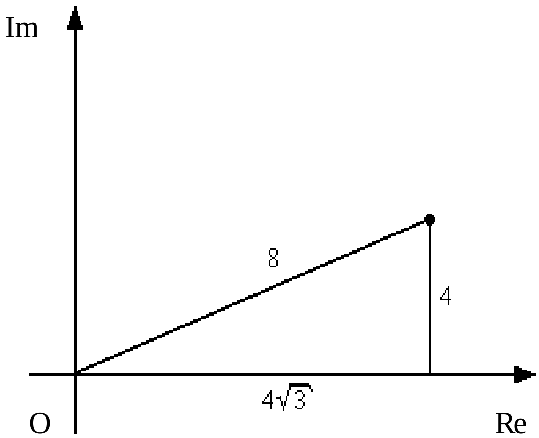
Calcular las formas rectangular y polar de $\overline{z}$, si z tiene módulo 4 y argumento $\pi/4$ (ó 45°).



Entonces la forma rectangular es $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\ i$ y la forma polar es $4\mathrm{cis}\,\pi/4$

Ejemplo

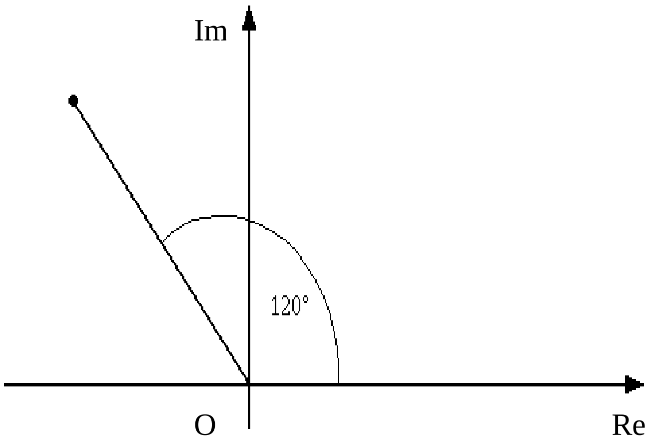
Pasar el número $4\sqrt{3}+4i$ a la forma polar. (También se sugiere empezar con un dibujo)



Como se puede ver, el tamaño $\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{64}=8$ y el argumento $\pi/6$ (ó 30°) y entonces, la forma polar queda $z=8\mathrm{cis}30° = 8(\cos 30° + i\,\mathrm{sen}30°)$.

Ejemplo

Pasar el número $2\text{cis}120°$ a la forma rectangular.



Entonces, como puede verse, las coordenadas de z son $(-1,\sqrt{3})$ y por lo tanto $z = -1 + \sqrt{3}\ i$

Ejercicios

Calcular las coordenadas de los vectores del plano cuyo módulo es r y cuyo argumento es s:

1. $r = 3\sqrt{2}, \quad s = 225°$
2. $r = 2, \quad s = 30°$
3. $r = 3, \quad s = 90°$
4. $r = 2, \quad s = 270°$
5. $r = \sqrt{2}, \quad s = 45°$
6. $r = 4, \quad s = 120°$
7. $r = 2, \quad s = 300°$

Reducir a coordenadas polares:

1. $7 + 7i$
2. $\sqrt{3 - i}$
3. $-5 + 5i$

4. $1-i\sqrt{3}$

5. $4+2i$

6. $-6-6\sqrt{3}i$

7. -4

8. $-8i$

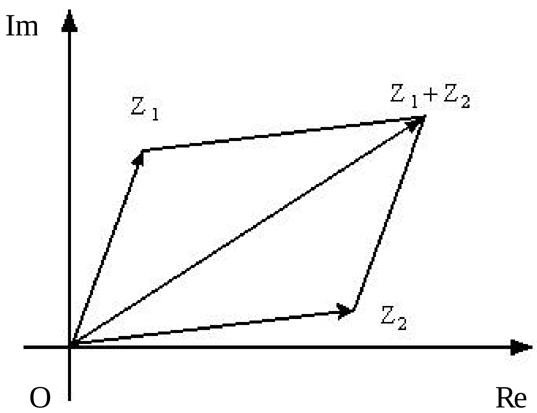
Calcule las potencias siguientes:

1. $(1+i)^8$

2. $(3+4i)^3$

3. $(5-12i)^2$

Entre las ventajas que tiene la representación geométrica de los números complejos, que permite estudiar la geometría del plano a través del álgebra de $\mathbb{C}$, señalamos que tal representación permite interpretar la suma de dos complejos z_1 y z_2 como la diagonal del paralelogramo construido sobre los sumandos (ver figura),



y además permite interpretar la multiplicación en la forma que expresa el siguiente

Teorema Sean $z_j = r_j(\cos\theta_j + i\,\mathrm{sen}\,\theta_j)$ $j=1,2$ dos números complejos (que por comodidad denotaremos algunas veces en forma abreviada como $z_j = r_j \,\mathrm{cis}\,\theta_j$.

Entonces,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(q_1 + q_2)$$

(Este teorema dice que para multiplicar dos complejos, se multiplican sus tamaños y se suman sus argumentos).

Demostración

$$(r_1 \cos q_1 + i r_1 \operatorname{sen} q_1)(r_2 \cos q_2 + i r_2 \operatorname{sen} q_2) =$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos q_1 \cos q_2 - \operatorname{sen} q_1 \operatorname{sen} q_2 + i(\operatorname{sen} q_1 \cos q_2 + \cos q_1 \operatorname{sen} q_2)\right]$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos(q_1 + q_2) + i \operatorname{sen}(q_1 + q_2)\right] = r_1 r_2 \operatorname{cis}(q_1 + q_2)$$

Corolario

(Teorema de De Moivre) Si $z = r \operatorname{cis} q$, es un número complejo, entonces

$\forall n \in \mathbb{Z},\quad z^n = r^n \operatorname{cis}(nq).$

Demostración

(Inducción sobre n). La base, $n = 1$, es obvia.

Paso inductivo: $\mathrm{T}(k) \Rightarrow \mathrm{T}(k+1)$.

Supóngase que el teorema vale para $n = k$, es decir, $z^k = r^k \operatorname{cis}(kq)$ y aplíquese el teorema.

Entonces $z^{k+1} = z^k \bullet z = r^k \operatorname{cis}(kq) \bullet r \operatorname{cis} q = r^{k+1} \operatorname{cis}[(k+1)q]$.

Paso inductivo aumentado: $\mathrm{T}(n) \Rightarrow \mathrm{T}(-n)$

$$z^{-n} = (z^n)^{-1} = \overline{z^n} / \left\|z^n\right\|^2 = \frac{r^n(\cos nq - i \operatorname{sen} nq)}{r^{2n}}$$

$$z^{-n} = r^{-n}(\cos(-nq) + i \operatorname{sen}(-nq)) = (r^{-n} \operatorname{cis}(-nq))$$

(Recuerde que $\cos$ es una función par y sen es una función impar, es decir:

$$\cos(-a) = \cos a, \quad \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a\ )$$

Ejemplos

1. Se desea realizar la siguiente operación:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2(\cos 25° + i\,\text{sen}\,25°)\cdot 5(\cos 75° + i\,\text{sen}\,75°) \\ &= 10(\cos 100° + i\,\text{sen}\,100°) = 10\,\text{cis}\,100° \end{aligned}$$

2. Otro ejemplo podría ser:

$$z_1 z_2 = 15\text{cis}140° \cdot 4\text{cis}280° = 60\text{cis}420° = 60\text{cis}60°)$$

3. Tenemos que resolver:

$$z^5 = (1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\,\text{cis}\,45°\right)^5 = 2^{5/2}\,\text{cis}5(45°) = 4\sqrt{2}\,\text{cis}\,225°$$

Ahora lo hacemos desarrollando el binomio:

$$\begin{aligned} (1+i)^5 &= 1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5 \\ &= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i \\ &= -4 - 4i \end{aligned}$$

Pasando a forma polar este resultado:

$$|z| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}\, y q = 225°$$

$$\therefore \quad z^5 = 4\sqrt{2}\,\text{cis}\,225°$$

En este ejemplo se nota que es mucho más corto sacar potencias de un número complejo en forma polar usando el teorema de De Moivre que desarrollando el binomio en forma rectangular (trate de calcular $(1+i)^{200}$ en forma rectangular).

Ejercicios

Realice las operaciones indicadas. En el caso de los ejercicios que están en forma rectangular, primero habrá que reducirlos a forma polar.

1. $2(\cos 25° + i\,\text{sen}\,25°)5(\cos 75° + i\,\text{sen}\,75°)$
2. $8(\cos 18° + i\,\text{sen}\,18°)6(\cos 24° + i\,\text{sen}\,24°)$
3. $15(\cos 140° + i\,\text{sen}\,140°)4(\cos 280° + i\,\text{sen}\,280°)$
4. $(1 + i\sqrt{3})(4 + 4i)$
5. $(6 - 6i)(-7 + 7\sqrt{3i})$

6. $2(\cos 15° + i\,\text{sen}\,15°)3(\cos 70° + i\,\text{sen}\,70°)4(\cos 65° + i\,\text{sen}\,65°)$

Ejercicios

Use el teorema de De Moivre para elevar a la potencia indicada

1. $[4(\cos 12° + i\,\text{sen}\,12°)]^3$
2. $[3(\cos 18° + i\,\text{sen}\,18°)]^4$
3. $[\sqrt{3}(\cos 25° + i\,\text{sen}\,25°)]^6$
4. $[2(\cos 20° + i\,\text{sen}\,20°)]^8$
5. $(1-i)^{10}$
6. $(1+i\sqrt{3})^9$
7. $(-2\sqrt{3+2i})^8$
8. $(\sqrt{3}-i)^{12}$
9. $[5(\cos 16° + i\,\text{sen}\,16°)]^{-4}$
10. $[\sqrt{7}(\cos 20° + i\,\text{sen}\,20°)]^8$
11. $[\cos(-10°) + i\,\text{sen}(-10°)]^6$
12. $(\cos 10° + i\,\text{sen}\,10°)^{-6}$
13. $(\sqrt{3}+i)^{-10}$
14. $(-1-i)^{12}$

Raíces n-simas de un Número Complejo

Supóngase que se desea encontrar a todos los complejos w tales que $w^n = z$, y que $z = r\ \text{cis}\,q$, supongamos además que $w_0 = r\,\text{cis}\,f$ es uno de ellos.

Entonces, por el teorema de De Moivre,

$$w_0^n = r^n\ \text{cis}\,nf = r\,\text{cis}\,q,\quad \therefore\quad r = \sqrt[n]{r}$$ (la raíz real) y $f = \dfrac{q}{n}$ Es decir $w_0 = \sqrt[n]{r}\ \text{cis}(\dfrac{q}{n})$.

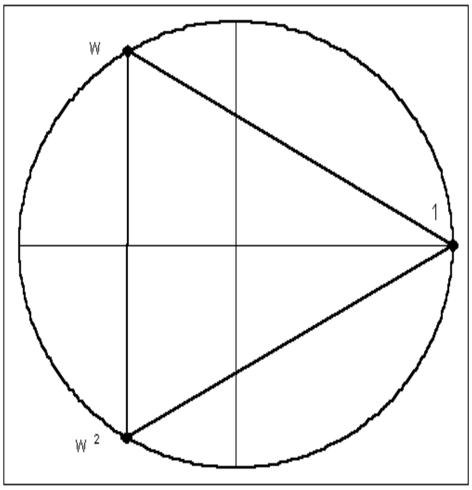
Considerando que si q es un argumento de z los números $q + 2p\,k,\quad k \in Z$, también lo son, se encuentran las otras $n-1$ raíces de z, sumando a f, el número $\frac{2p}{n}k,\quad k = 1,...,n-1$.

Así por ejemplo si $z = 1$ $(z = 1\text{cis}0)$ sus raíces cúbicas (que son tres), son:

$$r_1 = \sqrt[3]{1}\text{cis}\,\tfrac{0}{3} = 1$$

$$r_2 = 1\text{cis}[0 + \tfrac{2p}{3}] = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i = w = 1\text{cis }120°$$

$$r_3 = 1\text{cis}[0 + \tfrac{2p}{3}2] = -\frac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i = w^2 = 1\text{cis }240°$$



Si por ejemplo $z = 32\text{cis}150°$, sus raíces quintas son:

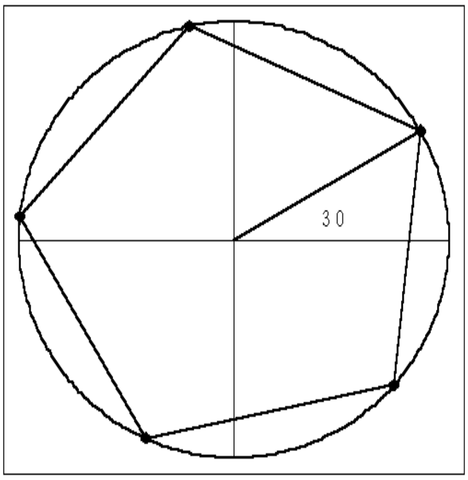
$$r_1 = 2\text{cis}\tfrac{150°}{5} = 2\text{cis}30°$$

$$r_2 = 2\text{cis}(30 + \frac{2p}{5}) = 2\text{cis}(30° + 72°) = 2\text{cis}102°$$

$$r_3 = 2\text{cis}[30° + 2(72°)] = 2\text{cis}174°$$

$$r_4 = 2\text{cis}[30° + 3(72°)] = 2\text{cis}246°$$

$$r_5 = 2\text{cis}[30° + 4(72°)] = 2\text{cis}318°$$



Justificamos las afirmaciones anteriores con el siguiente:

Teorema Sea $z = r \operatorname{cis} q$ un número complejo diferente de cero. Entonces para cada n entero positivo, z tiene exactamente n raíces n-simas, que están dadas por la fórmula:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} f_k \text{ en donde } f_k = \frac{q + 2p\,k}{n}, k = 0,1,...,n-1$$

(para fines prácticos, los ángulos pueden expresarse en grados, y en este caso, $f_k = \dfrac{q + 360°k}{n}, k = 0,1...,n-1)$

Demostración

Sea $b = \{w_0,...,w_{n-1}\}$ el conjunto formado por los n valores de la fórmula que corresponden a $k = 0,1...,n-1$

Entonces

1. $(w_k)^n = (\sqrt[n]{r})^n \operatorname{cis}(n\dfrac{q + 2p\,k}{n}) = r \operatorname{cis}(q + 2p\,k) = z$
2. Supóngase $w_i, 0 \leq j \leq i < n$. Entonces $\sqrt[n]{r} \operatorname{cis} f_j = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} f_j$ y por lo tanto f_i y f_j difieren, necesariamente, en un múltiplo entero de $2p$ es decir $f_i - f_j = 2pk = \dfrac{q + 2p\,i}{n} - \dfrac{q + 2p\,j}{n} = 2p\,\dfrac{i-j}{n}$ por lo tanto $k = \dfrac{i-j}{n}$, que debe ser entero, lo que dice que n divide a $i - j$ pero $0 \leq i - j \leq n \therefore\ i - j = 0,\ i = j$.

En resumen, $w_i = w_j \Rightarrow i = j$ y por contrapuesta, $i \neq j \Rightarrow w_i \neq w_j$. Luego la cardinalidad de b es n y dado que la ecuación $x^n - z = 0$ no puede tener más de n raíces en $\mathbb{C}$, b consta de todas las raíces n-simas de z.

Ejercicios

Obtenga las raíces que se indican.

1. Raíces cúbicas de $8(\cos 72° + i\,\mathrm{sen}\,72°)$
2. Raíces cúbicas de $216(\cos 27° + i\,\mathrm{sen}\,27°)$
3. Raíces cuadradas de $(1 - i\sqrt{3})$
4. Raíces cúbicas de $(1 - i\sqrt{3})$
5. Raíces cuadradas de $(-1 - i\sqrt{3})$
6. Raíces cúbicas de 1
7. Raíces cúbicas de 8
8. Raíces cúbicas de -1
9. Raíces cúbicas de i
10. Raíces cúbicas de $(3 + 4i)$
11. Raíces cuartas de $16\sqrt{2}(-1 + i)$
12. Raíces quintas de 1
13. Raíces sextas de $-27i$
14. Raíces quintas de $16\sqrt{2}(-1 + i)$

El Argumento de un Número Complejo

Cuando se cambian las coordenadas polares a rectangulares en un complejo $z, z = (r, q)$ éstas últimas quedan bien determinadas por las expresiones $x = r\cos q$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,q$ pero el cambio inverso-rectangulares a polares (en el que si $z = (x, y)$, r resulta ser $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, sólo define a q módulo $2p$. Es decir: Si q satisface $\mathrm{sen}\,q = \frac{y}{r}$, $\cos q = \frac{x}{r}$, ($r \neq 0$, por supuesto), entonces f satisfará las mismas relaciones si y sólo si $f = q + 2p\,k$, es decir si y solamente si q y f

difieren en un múltiplo entero de $2p$. Para evitar la ambigüedad que esta situación ocasiona, se conviene en definir $q = \operatorname{Arg} z$ como el único real con las propiedades:

$$x = r\cos q,\quad y = r\operatorname{sen} q,\quad -p < q \le p \quad (z \ne 0)$$

Se sabe (Teorema de De Moivre) que para multiplicar 2 complejos, se multiplican (en $\mathbb{R}$) sus tamaños y se “suman sus argumentos", pero para ser congruentes con la convención anterior, a esta suma se le debe aplicar una corrección para el caso de que no caiga dentro del rango acordado $(-p, p]$. De modo que si :

$$z_j = r_j \operatorname{cis} q_j \quad (\operatorname{Arg} z_j = q_j) \quad j = 1,2$$, Se tiene que :

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = q_1 + q_2 + 2p\, c(z_1 z_2)$$, en donde :

$$c(z_1, z_2) = \begin{cases} 1 & si \quad q_1 + q_2 \le -p \\ 0 & si \quad -p < q_1 + q_2 \le p \\ -1 & si \quad q_1 + q_2 > p \end{cases}$$

Así por ejemplo si $z_1 = z_2 = -1; -1 = \operatorname{cis} p$, $c(z_1, z_2) = -1$
$(-1)(-1) = 1\operatorname{cis}(2p - 2p) = 1\operatorname{cis} 0$

La Función Exponencial Compleja

Una observación importante:

Sea $Z : [a,b] \to \mathbb{C}$ la descripción de una trayectoria en $\mathbb{R}^2$. Entonces, $Z(t) = x(t) + iy(t)$ muestra que tanto la parte real como la imaginaria de Z son funciones que dependen de t , y entonces, la derivada de Z con respecto a t , debe definirse como :

$$Z' = x'(t) + iy'(t)$$

Así por ejemplo si $Z(t) = \cos t + i\operatorname{sen} t$, (que cuando la variable t se interpreta como “el tiempo" describe una rotación alrededor del origen con radio uno), la velocidad del movimiento —la derivada de Z con respecto a t — es $Z'(t) = -\operatorname{sen} t + i\cos t$, y del mismo modo, la aceleración resulta: $Z''(t) = -\cos t + i\operatorname{sen} t$

Se desea extender exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de manera que se conserven las propiedades básicas de la exponencial. Explícitamente se desea que E tenga las propiedades siguientes:

a) $E(x) = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\forall z,\ w \in \mathbb{C},\ E(z+w) = E(z)E(w)$

c) $E'(z) = E(z) \bullet z'$

En vista de esto, si $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, debe suceder que $E(z) = E(x+iy) = E(x)E(iy) = e^x E(iy)$ y por lo tanto, nuestro problema —encontrar la forma correcta de definir $E(z)$— se reduce a decidir la manera en que debe interpretarse $E(iy)$ que obviamente es un complejo cuyas partes real e imaginaria dependen de y. Es decir $E(iy) = U(y) + iV(y)$ y se debe encontrar qué funciones U y V resultan adecuadas para nuestro propósito (conseguir que E tenga propiedades deseadas a), b) y c))

Entonces

1. $E(iy) = U(y) + iV(y)$ por definición.

   Derivando en el supuesto de que E satisface c),

2. $E'(iy) = iE(iy) = U'(y) + iV'(y)$ en donde U' y V'

   son derivadas con respecto a su variable y.

Derivando una vez más:

3. $E''(iy) = -E(iy) = U''(y) + iV''(y) = -U(y) - iV(y)$

   resultado que muestra que tanto U como V son

   funciones que satisfacen la ecuación $f'' + f = 0$

Haciendo $y = 0$ en (1) y en (2), se obtiene:

4. $1 = U(0) + iV(0) \ \therefore\ U(0) = 1;\ V(0) = 0$

5. $i = U'(0) + iV'(0) \ \therefore\ U'(0) = 0;\ V'(0) = 1$

Los resultados anteriores muestran que tanto U como V deben ser las soluciones a los problemas de valores iniciales siguientes:

$$U: \quad y'' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

y

$$V: \quad y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

y como las soluciones a tales problemas son únicas, U debe ser la función coseno y V la función seno. Luego:

$$E(x+iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x \operatorname{cis} y$$

Teorema. La función $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ así definida tiene las propiedades a), b) y c)

Demostración de las propiedades:

a) $E(x) = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$z \in \mathbb{R}, \quad z = x + 0i, \quad E(z) = \exp(x)\operatorname{cis}(0)$

$\operatorname{cis}(0) = 1 \;\therefore\; E(z) = E(x) = \exp(x)$

b) $E(z_1 + z_2) = E(z_1)E(z_2)$

$z_j = x_j + iy_j \quad j = 1,2$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = \;\therefore$

$E(z_1 + z_2) = \exp(x_1 + x_2)\operatorname{cis}(y_1 + y_2) = e^{x1}e^{x2}\operatorname{cis}(y_1 + y_2) = (e^{x1}\operatorname{cis} y_1)(e^{x2}\operatorname{cis} y_2)$

$= E(z_1) \bullet E(z_2)$

c) $E'(z) = E(z)z'$

$z(t) = x(t) + iy(t) \quad \therefore \quad E(z) = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$

$E'(z) = x'e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) + y'e^x(-\operatorname{sen} y + i\cos y)$

$(-\operatorname{sen} y = i^2 \operatorname{sen} y)$

$E'(z) = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)(x' + iy') = E(z) \bullet z'$

Teorema. La función exponencial es periódica, y cada período es de la forma: $2p\, ki, \quad k \in \mathbb{Z}$

Demostración

Sea w un período de E, luego $\forall z \in \mathbb{C}, \; E(z) = E(z+w)$. Haciendo $z = 0$, $1 = E(w)$ y si $w = x + yi, \;\; E(w) = e^x \operatorname{cis} y = 1 \;\therefore\; x = 0, y = \operatorname{sen}^{-1} 0,$
$y = \cos^{-1} 1$ entonces $y = 2p\, k, \;\; k \in \mathbb{Z}$.

Una consecuencia de la demostración es que $E(z)=1 \Leftrightarrow z=2pki,\ \ k\in\mathbb{Z}$.

Representación Geométrica de Algunas Rectas bajo la Transformación E

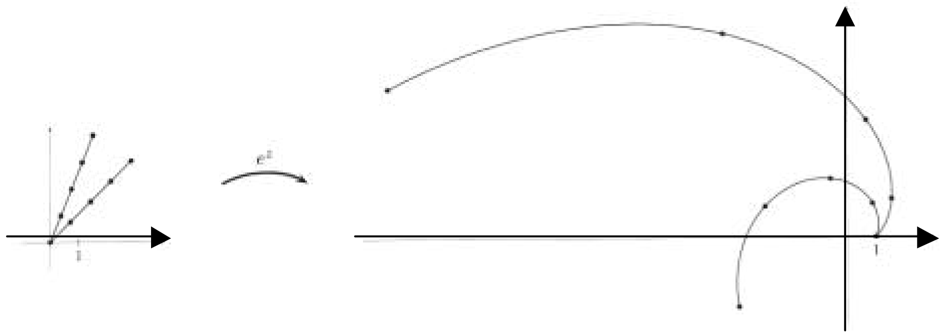
Sea $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la transformación: $T(z)=E(z)$.

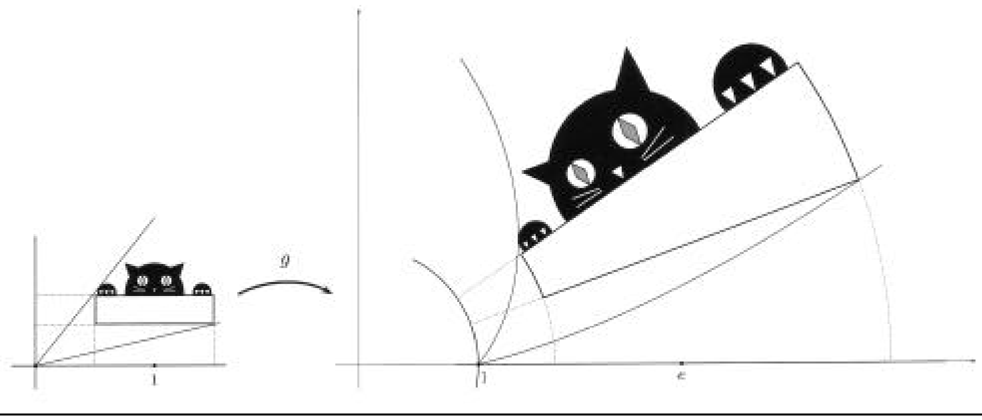
Obsérvese que el origen de $\mathbb{C}$, va a dar al punto $(1,0)$.

A medida que la variable recorre el eje x alejándose del origen en el sentido positivo, e^{x} aumenta —exponencialmente—, pero y se mantiene igual a cero, luego la imagen de $[0,\infty)$ es $[1,\infty)$ mientras que $E(-\infty,0)$ es $(0,1)$. De la misma manera puede analizarse la imagen bajo la transformación E de cualquier recta horizontal $(y=cte)$. Se encuentra que la imagen de la semirrecta cuyos puntos tienen abcisa positiva, es la parte que queda afuera del círculo unitario, del rayo que parte del origen y cuyo argumento es la y de la recta. La semirrecta de puntos con x negativa tiene por imagen la porción del rayo que queda dentro del círculo, $(E(z)\neq 0\quad\forall\ z\in\mathbb{C}$.

Nótese que como $(E(z)\bullet E(-z)=1,\forall\ \ z\in\ \mathbb{C}$, y por lo tanto, $\forall z\in\mathbb{C},\ e^{z}\neq 0,$ el origen del plano $\mathbb{C}$ no es imagen de ningún complejo z bajo la transformación "exponencial".

Las rectas verticales $x=\text{cte}$ (tamaño fijo y argumento de $-\infty\ a\ \infty$), van a dar a circunferencias de radio e^{x} y las rectas que parten del origen se "retratan" como espirales que "arrancan" de $(1,0)$. (Las imágenes van aumentando tanto de tamaño como de argumento, a medida que la variable se va alejando del origen).


1
e^z
1


1
g
1
e

La Función Logaritmo

Con el deseo de definir la función inversa de la exponencial, —el logaritmo complejo— observamos que si $z = x + yi,\ \ E(z) = e^x \operatorname{cis} y,$ (por supuesto, $\|E(z)\| = e^x,\ \ \operatorname{Arg} E(z) = y$). Por lo tanto debe definirse:

$$L(z) = 1n\|z\| + i \operatorname{Arg} z$$

Nótese que si $z = x,\ x \in \mathbb{R}^+,\ L(z) = 1n|x| + 0i = 1nx$, es decir, L es una extensión de $1n$.

Si $\quad z = -x,\ L(z) = 1n|x| + pi$.

Nótese también que siendo la exponencial una función periódica, debe escogerse una banda del plano de ancho $2p$ para seleccionar en ella los argumentos de los logaritmos complejos. En efecto, si escogemos la región $\{(x,y) \in \mathbb{C} \mid -p < y \leq p\}$, entonces, la función exponencial definida en ella, la "mapea" biyectivamente en todo el plano menos el origen.

Otra vez: Si se define $D = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid -p < y \leq p\}$, $E : D \to \mathbb{C} - \{0\}$ es biyectiva y su inversa es $L : \mathbb{C} - \{0\} \to D$.

En efecto, $\forall z \in D,\quad z = x + yi,\quad E(z) = e^x \operatorname{cis} y\ ;\quad L(e^x \operatorname{cis} y) = 1n\ e^x + iy = x + yi$.

Y si $z = x + yi$ es un complejo no cero de tamaño r y de argumento q ($x = r \cos q$, $y = r \operatorname{sen} q$) entonces $L(z) = \ln r + iq$, y por lo tanto, $E(L(z)) = e^{\ln r} \operatorname{cis} q = r \cos q + ir \operatorname{sen} q =$ $x + yi = z$.

Obsérvese que la función $L : \mathbb{C} - \{0\} \to D$ está bien definida (en el sentido de que $\forall z \neq 0,\quad L(z) \in D$ ya que, según convinimos, el argumento de $L(z)$ debe satisfacer $-p < \operatorname{Arg} z \leq p$

Ejemplo

$L(i) = \ln\|i\| + i \operatorname{Arg} i = \ln 1 + (p/2)i = (p/2)i$

Ejemplo

$L(-1) = l\,\mathrm{n}\|-1\| + i \operatorname{Arg}(-1) = \ln 1 + pi = pi$

Teorema

Si $z_1 = r_1 \operatorname{cis} q_1, \quad z_2 = r_2 \operatorname{cis} q_2$,
Entonces $L(z_1 z_2) = L(z_1) + L(z_2) + 2p\, i c(z_1, z_2)$

Demostración

$$L(z_1 z_2) = L(r_1 r_2 \operatorname{cis}(q_1 + q_2 + 2p\ c(z_1, z_2))) =$$
$$1n(r_1 r_2) + i(q_1 + q_2 + 2p\ c(z_1, z_2)) =$$
$$1nr_1 + iq_1 + 1nr_2 + iq_2 + 2p\ ic(z_1, z_2) =$$
$$L(z_1) + L(z_2) + 2p\ ic(z_1, z_2)$$

Definición

$$\text{Si } z \text{ es } z \neq 0, \quad w \in \mathbb{C}, \quad z^w = E(wL(z)).$$

En el caso de que $z = x \in \mathbb{R}^+$, $\quad w = y \in \mathbb{R}$

$E(x^y) = E(yL(x)) = E(y1nx) = \exp(y1nx)$ por lo que, como puede verse, la definición anterior extiende a la que se tenía para $\mathbb{R}$

Nota de $z^w = E(w(z))$, aplicando la función L, se ve que $L(z^w) = wL(z)$

Teorema

1. $\forall z \neq 0, \quad w_{1,} w_2 \in \mathbb{C}, \quad z^{w_1 + w_2} = z^{w_1} \bullet z^{w2}$
2. $(z^{w_1})^{w2} = z^{w_1 w_2}$
3. Si z_1 y z_2 son distintos de cero,

   $w \in \mathbb{C}, \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w\ E(2p\ w\,i\,c(z_1 z_2))$:

Demostración

1. $z^{w_1 w_2} = E((w_1 + w_2)L(z)) = E(w_1 L(z) + w_2 L(z)) =$

   $= E(w_1 L(z)) \bullet E(w_2 L(z)) = z^{w_1} \bullet z^{w_2}$

2. $(z^{w_1})^{w_2} = E(w_2 L(z^{w_1})) =$

$$= E(w_2 \bullet w_1 L(z)) \; = z^{w_1 w_2}$$

3. $$(z_1 z_2)^w = E(wL(z_1 z_2)) =$$

$$= E[w(L(z_1) + L(z_2) + 2\pi i c(z_1 z_2))]$$

$$= E[wL(z_1) + wL(z_2) + 2\pi\, w i c(z_1 z_2)] =$$

$$= E(wL(z_1)) \bullet E(wL(z_2)) \bullet E(2\pi\, w i c(z_1 z_2)) =$$

$$= z_1^w \bullet z_2^w \bullet E(2\pi\, w i c(z_1 z_2))$$

Ejemplos

1. $$(-1)^{\frac{1}{2}} = E(1/2L(-1)) = E(1/2\pi i) = e^{\frac{\pi}{2} i} =$$

$$= \cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2 = i$$

En la enseñanza del álgebra elemental se asegura que para obtener la raíz cuadrada de un número negativo, se deberá tomar la correspondiente a su valor absoluto multiplicada por i. Así por ejemplo se dice que $\sqrt{-4} = 2i$ y se justifica escribiendo:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i.$$

Note que en el paso intermedio $\sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1}$ no se tomó en cuenta la corrección —multiplicar por $E(\frac{1}{2}\, 2\pi i\, c(-1,4))$— que en este caso es cero ya que la suma de los argumentos de los factores no excede π, y así, el resultado es correcto, aunque el procedimiento no. Si lo fuera, entonces valdría la conocida "paradoja" siguiente:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1. \;\; ¿1 = -1?$$

La falacia aparece cuando se sustituye $\sqrt{(-1)(-1)}$ por $\sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}$ ya que aquí la corrección no es cero. En efecto, $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$ y por lo tanto $\operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg}(-1) = 2\pi$, suma que excede el rango que se escogió y que obliga en este caso a aplicar la corrección, es decir debe multiplicarse el lado derecho de la igualdad por $E(\frac{1}{2}\, 2\pi i \;\, c(-1,-1)) = E(-\pi i) = \operatorname{cis}(-\pi) = -1$.

Ahora si: $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}(-1) = i^2(-1) = (-1)(-1) = 1$

Las Funciones Trigonométricas

Recordando que para todo número real q, $e^{qi} = \cos q + i\,\mathrm{sen}\,q$, $e^{-qi} = \cos q - i\,\mathrm{sen}\,q$, se ve que entonces, $e^{qi} + e^{-qi} = 2\cos q$; $e^{qi} - e^{-qi} = 2\,i\,\mathrm{sen}\,q$ y que por lo tanto, $\cos q = \dfrac{e^{qi}+e^{-qi}}{2}$; $\mathrm{sen}\,q = \dfrac{e^{qi}-e^{-qi}}{2i}$, conviene definir para cada $z \in \mathbb{C}$, $\cos z = \dfrac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}$, $\mathrm{sen}\,z = \dfrac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}$.

Con este acuerdo, las nuevas funciones —que extienden a las correspondientes cos y sen de variable real— adquieren, entre otras, las siguientes propiedades:

Teorema $\forall z,\ w \in \mathbb{C}$,

1. $\mathrm{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
2. $(\mathrm{sen}\,z)' = \cos z$
3. $(\cos z)' = -\mathrm{sen}\,z$
4. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \mathrm{sen}\,z\,\mathrm{sen}\,w$
5. $\mathrm{sen}(z+w) = \mathrm{sen}\,z \cos w + \cos z\,\mathrm{sen}\,w$

Demostración

En efecto:

1. $$\mathrm{sen}^2 z = \left(\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2zi}+e^{-2zi}-2}{-4}$$

$$\cos^2 z = \left(\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2zi}+e^{-2zi}+2}{4}$$

por lo tanto: $sen^2 z + \cos^2 z = \dfrac{e^{2zi}+e^{-2zi}+2-e^{2zi}-e^{-2zi}+2}{4} = 1$

2. $$(\mathrm{sen}\,z)' = \left(\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\right)' = \frac{i(e^{zi}+e^{-zi})}{2i} = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} = \cos z$$

3. $$(\cos z)' = \left(\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\right)' = \frac{i(e^{zi}-e^{-zi})}{2} = \frac{i^2(e^{zi}-e^{-zi})}{2i} = -\,\mathrm{sen}\,z$$

4. $$\cos z\cos w=\frac{(e^{zi}+e^{-zi})(e^{wi}+e^{-wi})}{4}=\frac{e^{(z+w)i}+e^{(z-w)i}+e^{(-z+w)i}+e^{-(z+w)i}}{4}$$

$$\operatorname{sen} z\operatorname{sen} w=\frac{(e^{zi}-e^{-zi})(e^{wi}-e^{-wi})}{(2i)(2i)}=\frac{e^{(z+w)i}-e^{(z-w)i}-e^{(-z+w)i}+e^{-(z+w)i}}{-4}$$

$$\therefore\ \cos z\cos w-\operatorname{sen} z\operatorname{sen} w=\frac{2e^{(z+w)i}+2e^{-(z+w)i}}{2}=\cos(z+w)$$

5. $$\operatorname{sen} z\cos w=\frac{(e^{zi}-e^{-zi})(e^{wi}+e^{-wi})}{2(2i)}=\frac{e^{(z+w)i}+e^{(z-w)i}-e^{(-z+w)}-e^{-(z+w)i}}{4i}$$

$$\cos z\operatorname{sen} w=\frac{(e^{zi}+e^{-zi})(e^{wi}-e^{-wi})}{2(2i)}=\frac{e^{(z+w)i}-e^{(z-w)i}+e^{(-z+w)i}-e^{-(z+w)i}}{4i}$$

$$\therefore\ \operatorname{sen} z\cos w+\cos z\operatorname{sen} w=\frac{2e^{(z+w)i}-2e^{-(z+w)i}}{4i}=\operatorname{sen}(z+w)$$