Ondas

Prof. Jesús Hernández Trujillo
Facultad de Química, UNAM

Introducción

Definición:

Una onda es una perturbación que se propaga en el tiempo y el espacio

Ejemplos:

- Ondas en una cuerda
- Olas en la superficie del agua
- Ondas en cuerpos elásticos
- Sonido
- Ondas electromagnéticas

Características del movimiento ondulatorio:

- Hay transferencia de energía y no de materia.

Características del movimiento ondulatorio:

- Hay transferencia de energía y no de materia.
- Las ondas mecánicas se propagan en un medio.

Características del movimiento ondulatorio:

- Hay transferencia de energía y no de materia.
- Las ondas mecánicas se propagan en un medio.
- Las ondas electromagnéticas pueden propagarse en el vacío.

Características del movimiento ondulatorio:

- Hay transferencia de energía y no de materia.
- Las ondas mecánicas se propagan en un medio.
- Las ondas electromagnéticas pueden propagarse en el vacío.
- Hay una velocidad de propagación de la perturbación.

Características del movimiento ondulatorio:

- Hay transferencia de energía y no de materia.
- Las ondas mecánicas se propagan en un medio.
- Las ondas electromagnéticas pueden propagarse en el vacío.
- Hay una velocidad de propagación de la perturbación.
- La velocidad de propagación depende del medio.

Además:

Las ondas sufren modificaciones cuando:

- cambian las propiedades del medio de propagación (reflexión, refracción, polarización)

Además:

Las ondas sufren modificaciones cuando:

- cambian las propiedades del medio de propagación (reflexión, refracción, polarización)
- se interponen obstáculos (difracción, dispersión)

Además:

Las ondas sufren modificaciones cuando:

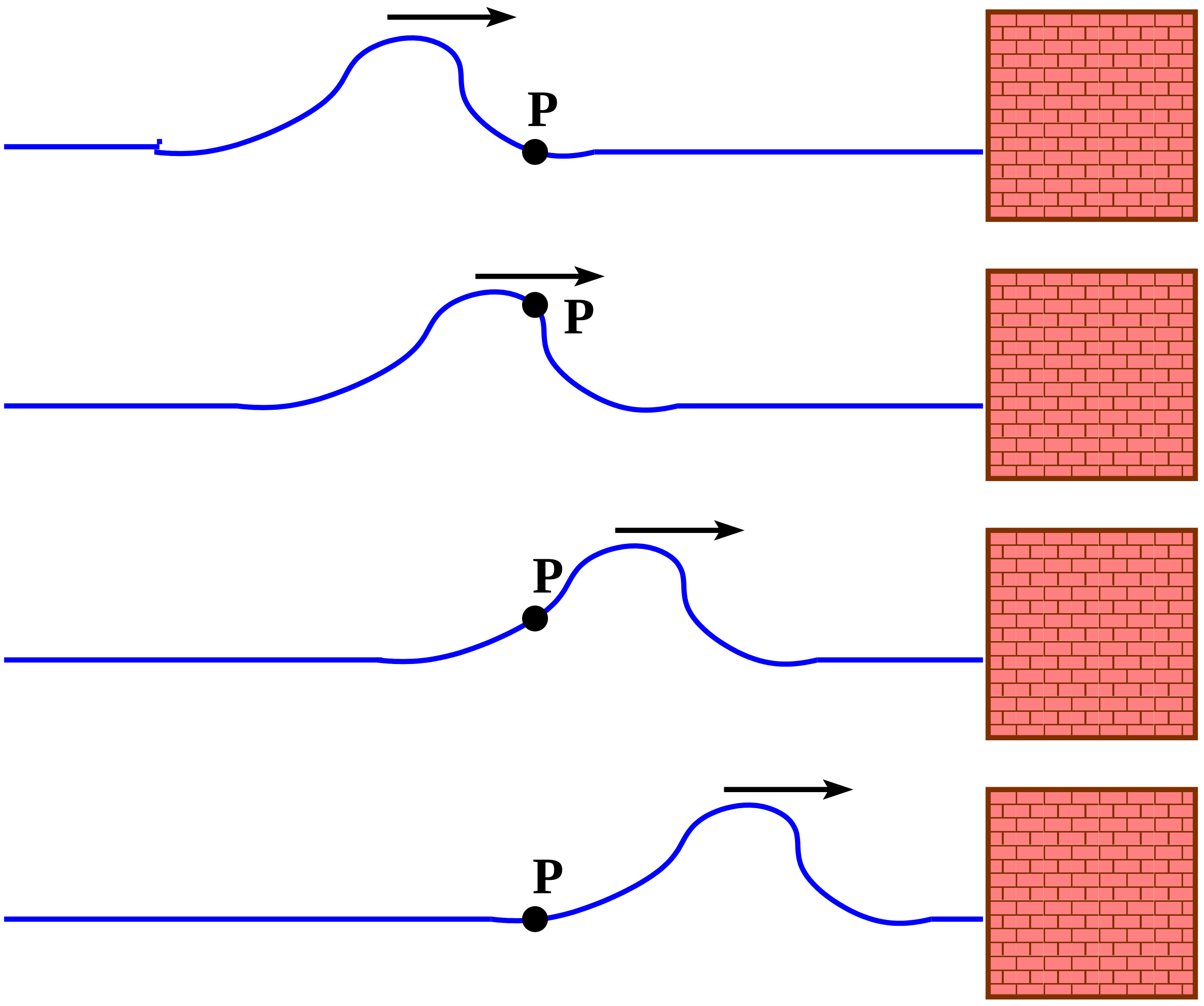
- cambian las propiedades del medio de propagación (reflexión, refracción, polarización)
- se interponen obstáculos (difracción, dispersión)
- varias ondas coinciden en la misma región (interferencia)

Clasificación:

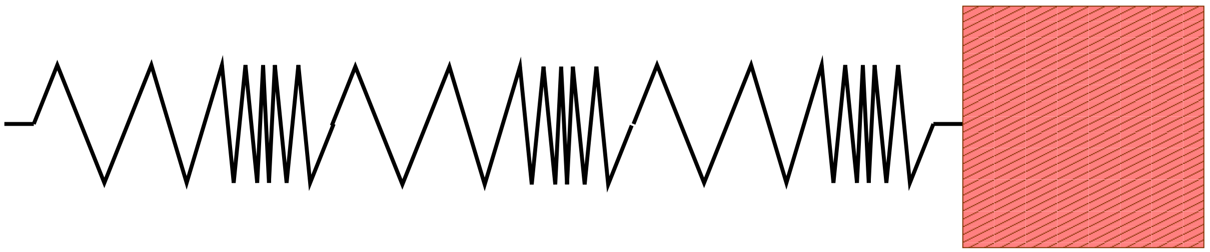
Onda transversal: La perturbación es perpendicular a la dirección de propagación

Onda longitudinal: La perturbación es paralela a la dirección de proga-cación

Ejemplo: Onda transversal



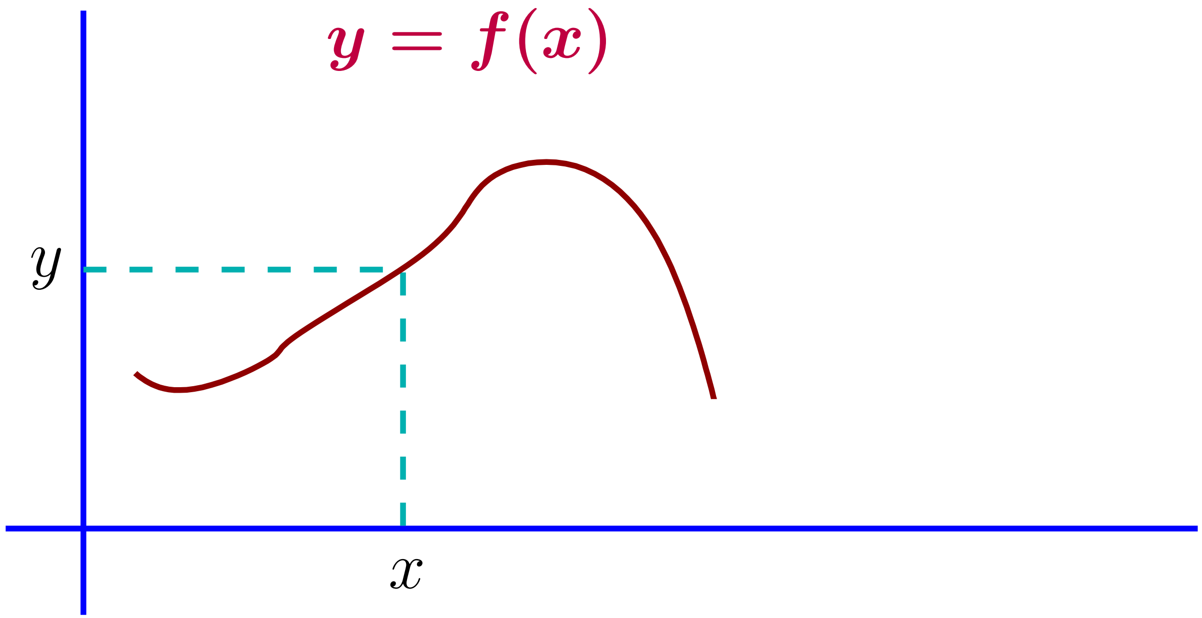
Ejemplo: Onda longitudinal



“El impulso es más rápido que el agua, por lo que con frecuencia las olas escapan del lugar de su creación, en tanto que el agua no; lo mismo sucede con las ondas producidas por el viento en un campo de granos, donde las vemos correr a través del campo mientras los granos permanecen en su lugar”

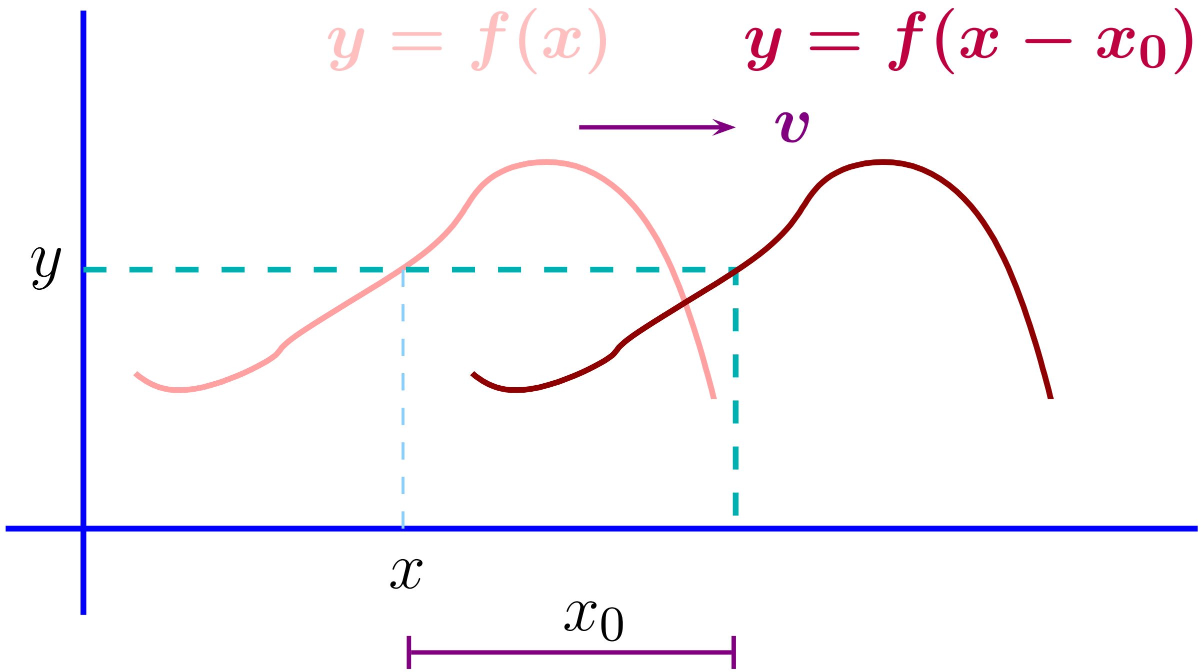
Leonardo da Vinci

Traslación:



Ondas viajeras

Traslación:



v	:	velocidad de propagación
t	:	tiempo

tal que: $x_0 = vt$

Ondas viajeras:

Una onda viajera que se propaga a velocidad v es

$$y(x,t) = f(x \pm vt)$$

donde:

$$\begin{array}{ccl} + & \longrightarrow & \text{hacia la izquierda} \\ - & \longrightarrow & \text{hacia la derecha} \end{array}$$

Ecuación de onda

La función de onda

$$y(x,t) = f(x \pm vt)$$

satisface la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Ejercicio:

Un pulso de una onda transversal se describe por medio de

$$y = 5e^{-x^2},$$

donde x y y están dados en metros.

1. Traza la gráfica del pulso
2. Escribe la función de onda $y(x,t)$ que representa esta onda si se mueve en la dirección negativa del eje x con una velocidad de 3 m/s.
3. Verifica que $y(x,t)$ satisface la ecuación de onda.
4. traza la gráfica de la onda para t = 0, 1 y 2 s.

Ondas armónicas

Onda periódica: Cada punto oscila con el mismo periodo

onda armónica: Cada punto oscila siguiendo un movimiento armónico simple

Ondas armónicas

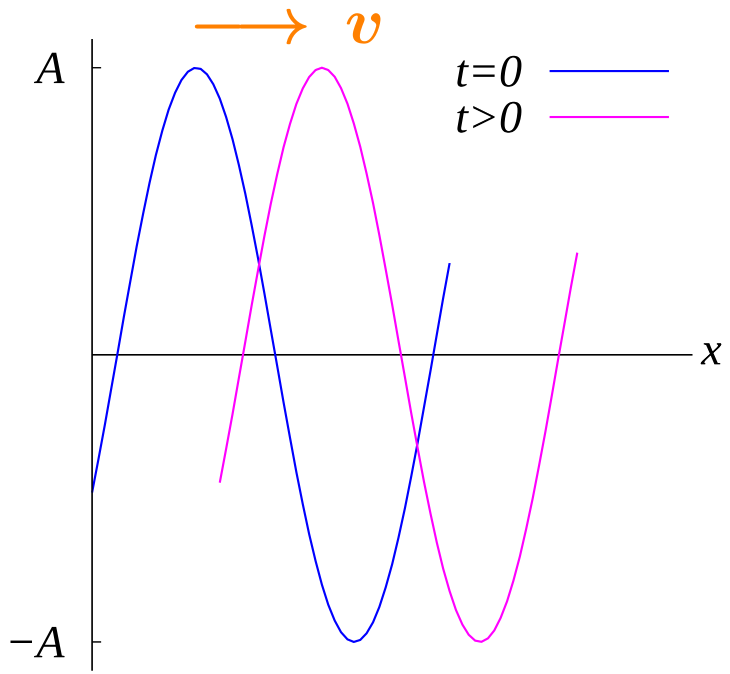
Onda periódica: Cada punto oscila con el mismo periodo

onda armónica: Cada punto oscila siguiendo un movimiento armónico simple

Todas las ondas pueden describirse en términos de ondas armónicas

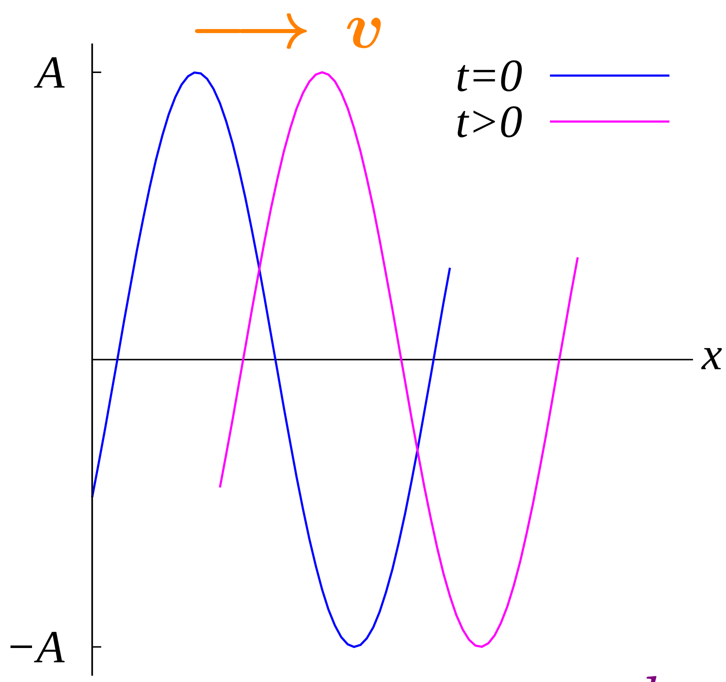
Una onda senoidal que se mueve a la derecha

$$y(x,t) = A \operatorname{sen} k(x - vt)$$



Una onda senoidal que se mueve a la derecha

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,k(x - vt)$$



A es la amplitud

k es el número de onda

$\omega = kv$

La longitud de onda:

$$\lambda = 2\pi/k$$

La frecuencia: $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{kv}{2\pi} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{v}{2\pi}$, $\quad \nu = v/\lambda$

El periodo: $\tau = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{\lambda}{v}$

Además:

- En el caso de las ondas electromagnéticas en el vacío:

$$v = c\,, \qquad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

- En espectroscopia, el número de ondas es

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$$

Ejercicios:

1. Verifica que la onda armónica $y(x,t) = A\,\text{sen}\,k(x - vt)$ satisface la ecuación de onda *(tarea)*
2. Las ondas sonoras son ondas logitudinales. Una onda sonora en aire produce una variación de presión dada por
$$p(x,t) = 0.75\cos\frac{\pi}{2}(x - 340t)\,,$$
donde p está en Pascales, x en metros y t en segundos. Encuentra:
   a) la amplitud de la presión
   b) la longitud de onda
   c) la frecuencia
   d) la velocidad de la onda

Ejercicio:

3. Una onda armónica en una cuerda es

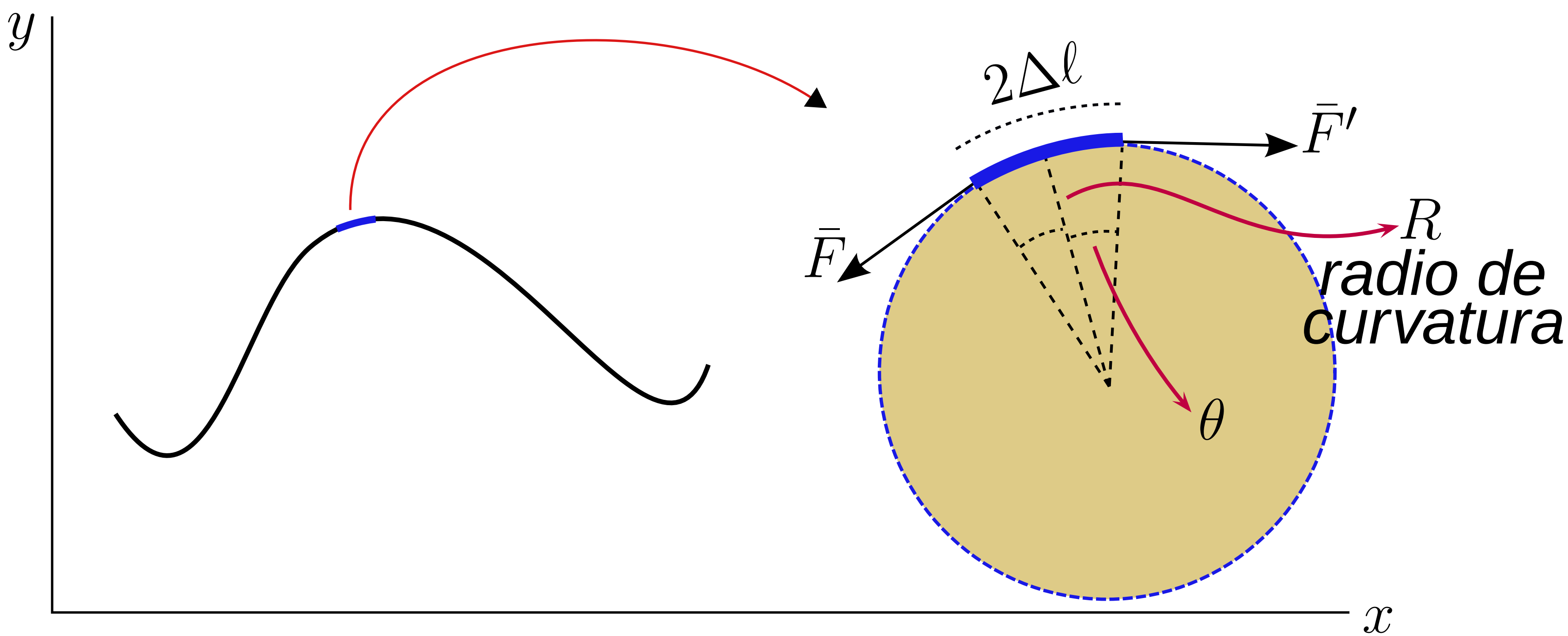
$$y(x,t) = 0.001\,\mathrm{sen}(62.8x + 314t)$$

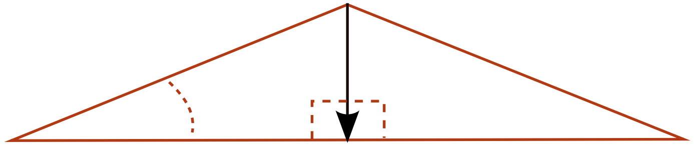
donde la amplitud, x y y están dados en metros y t en segundos. Encuentra:

a) El sentido y la velocidad con que se propaga la onda

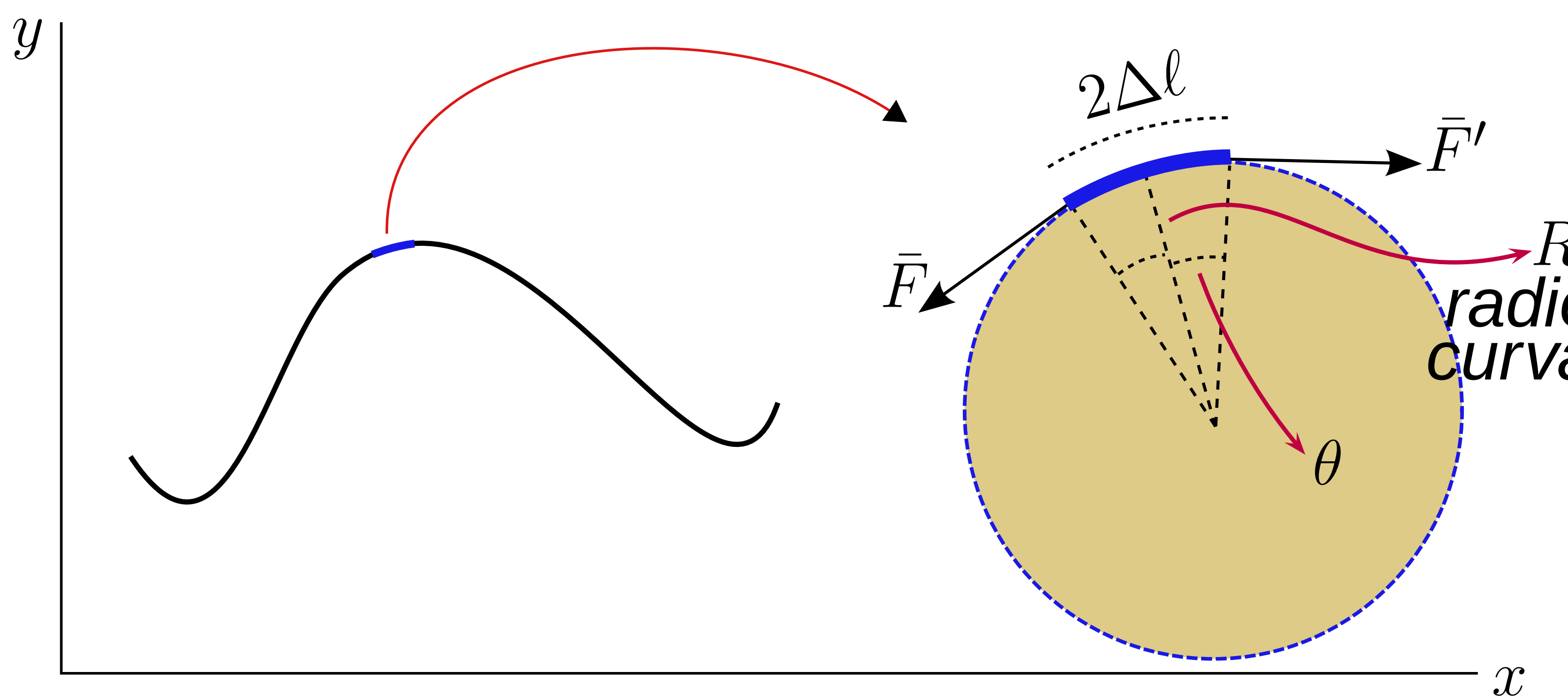
b) La velocidad máxima de un segmento de la cuerda

Onda transversales en una cuerda

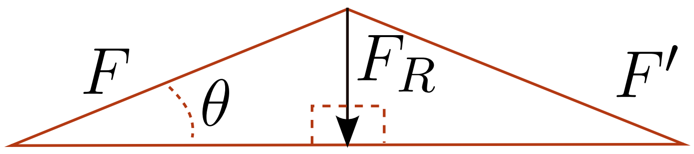




Onda transversales en una cuerda



$$a_c = \frac{v^2}{R}$$



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\frac{1}{2}F_R}{F} \qquad F_R = 2F\operatorname{sen}\theta \approx 2F\theta$$

θ *pequeño*

Masa del segmento: $\Delta m = 2\mu\Delta\ell$

$$F_R = (\Delta m)\, a_c = 2\mu\Delta\ell\frac{v^2}{R} \approx 2F\theta$$

se obtiene:

$$\mu\Delta\ell\frac{v^2}{R} = F\theta$$

Además, como $\theta = \Delta\ell/R$:

$$\mu\Delta\ell\frac{v^2}{R} = F\frac{\Delta\ell}{R}\,,$$

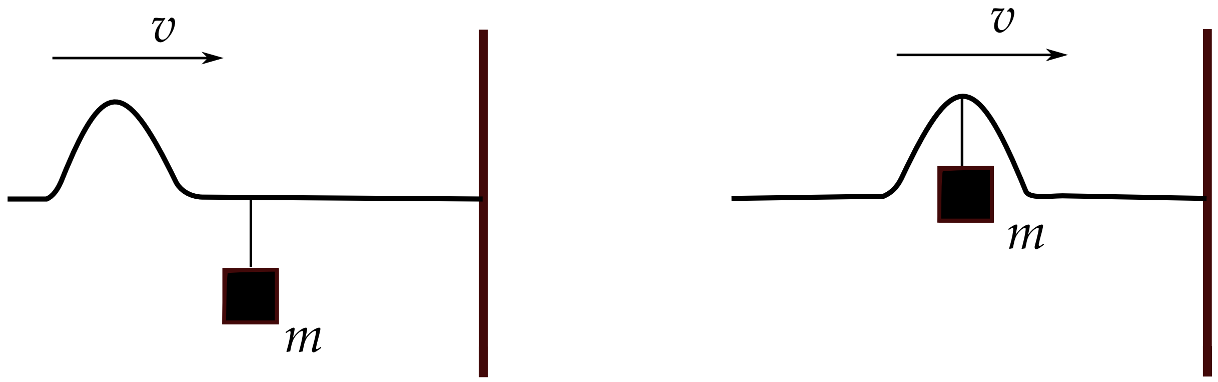
entonces:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

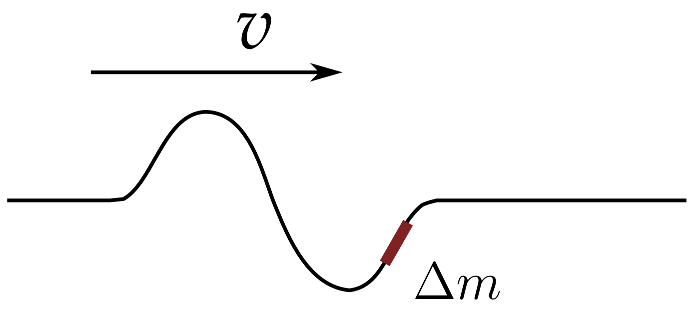
Energía transmitida en una onda

En el movimiento ondulatorio se transfiere energía

Ejemplo:



En el caso de una onda armónica:



$$\Delta E = \frac{1}{2}(\Delta m)w^2 A^2$$

Si μ es la densidad lineal:

$$\Delta m = \mu \Delta x$$

y por lo tanto,

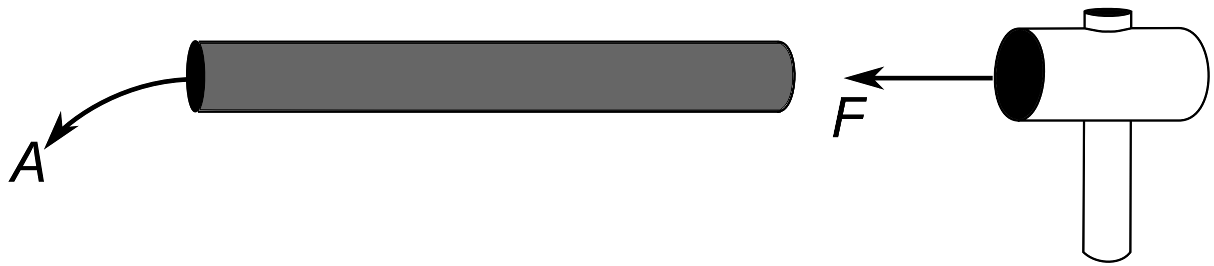
$$\Delta E = \frac{1}{2}\mu\,\Delta x\,\omega^2 A^2$$

Además, la potencia es

$$\begin{aligned} p &= \frac{dE}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta E}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \end{aligned}$$

Onda longitudinal en una varilla

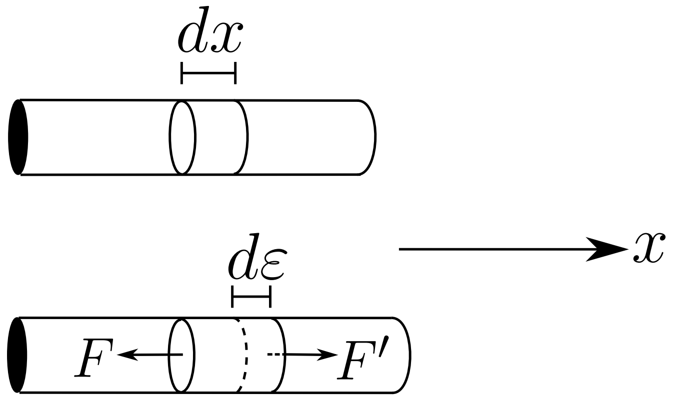
Una varilla que se deforma al golpearla:



Módulo de Young:

$$Y = \frac{\text{esfuerzo normal}}{\text{deformación}} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}}$$

Ley de Hooke, funciona bien a deformaciones pequeñas



- $\varepsilon(x, t)$: desplazamiento
- dx: elemento de longitud

- $dF = F' - F$: fuerza en el elemento de longitud

Por lo tanto:

$$F = Y A \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

Además, la masa es:

$$dm = \rho dV = \rho A dx$$

donde ρ es la densidad volumétrica

La aceleración:

$$a = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$$

Segunda ley de Newton:

$$dF = (\rho A\, dx)\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}\right)$$

Por lo tanto:

$$\frac{dF}{dx} = (\rho A)\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}\right)$$

Además:

$$\frac{d}{dx}(F) = YA\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)$$

Se obtiene

$$\rho A\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = YA\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$$

La siguiente es una ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \left(\frac{Y}{\rho}\right) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$$

La velocidad de propagación es:

La siguiente es una ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \left(\frac{Y}{\rho}\right) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$$

La velocidad de propagación es:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}}$$

Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas:

La existencia de ondas electromagnéticas puede deducirse a partir de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo

Forma integral de las ecuaciones de Maxwell:

(1) $$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ Ley de Gauss

(2) $$\oint \bar{B}\cdot d\bar{A} = 0$$ Ley de Gauss magnética

(3) $$\oint \bar{B}\cdot d\bar{\ell} = \mu_0\left(I + \varepsilon_0\frac{d}{dt}\int \bar{E}\cdot d\bar{S}\right)$$ Ley de Ampere

(4) $$\oint \bar{E}\cdot d\bar{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \bar{B}\cdot d\bar{S}$$ Ley de Faraday

donde ϵ_0 : permitividad del vacío
μ_0 : permeabilidad

Las ecuaciones involucran a las coordenadas espaciales y el tiempo de manera acoplada.

Ley de Ampere: Un campo eléctrico variable produce un campo magnético

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{\ell} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \bar{E} \cdot d\bar{S} \right)$$

Ley de Ampere: Un campo eléctrico variable produce un campo magnético

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{\ell} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \bar{E} \cdot d\bar{S} \right)$$

Ley de Faraday: Un campo magnético variable produce un campo eléctrico

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = - - \frac{d}{dt} \int \bar{B} \cdot d\bar{S}$$

Es decir:

- Cuando un campo eléctrico o uno magnético cambia con el tiempo, induce un campo de la otra clase en el espacio.

Es decir:

- Cuando un campo eléctrico o uno magnético cambia con el tiempo, induce un campo de la otra clase en el espacio.
- Se produce una perturbación que consiste en campos eléctricos y magnéticos que varían con el tiempo y se propaga en el espacio (incluso en el vacío) **(radiación electromagnética)**

Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5}$$

$$\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla \times \bar{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \mu_0 \bar{J} \tag{8}$$

Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5)$$

$$\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \times \bar{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \mu_0 \bar{J} \quad (8)$$

Por ejemplo, al integrar (5) sobre un volumen V limitado por una superficie A:

$$\begin{array}{ccc} \int_V \nabla \cdot \bar{E}\, dV & = & \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \int_A \bar{E} \cdot d\bar{A} & = & \frac{Q}{\epsilon_0} \end{array}$$

ec. 1

En ausencia de fuentes:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \bar{0} \tag{9}$$

$$\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \tag{11}$$

$$\nabla \times \bar{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0 \tag{12}$$

Ejercicio:

Usa las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial para obtener una ecuación de onda para $\bar{E}$:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \bar{E} \tag{13}$$

La velocidad de propagación es

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} = 3.00 \times 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

De igual manera:

(14) $$\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \bar{B}$$

Además:

- Para cada componente de $\bar{E}$ o $\bar{B}$:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_i \,, \qquad \frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 B_i \quad i = x, y, z$$

De igual manera:

(14) $$\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \bar{B}$$

Además:

- Para cada componente de $\bar{E}$ o $\bar{B}$:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_i \,, \qquad \frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 B_i \quad i = x, y, z$$

- Se cumple la siguiente relación entre las magnitudes de $\bar{E}$ y $\bar{B}$

$$E = cB$$ (con $\bar{E}$ y $\bar{B}$ en fase)

- La dirección de propagación es la del vector $\bar{\boldsymbol{E}} \times \bar{\boldsymbol{B}}$.

- La dirección de propagación es la del vector $\bar{\boldsymbol{E}} \times \bar{\boldsymbol{B}}$.
- Por lo tanto, la radiación electromagnética es transversal.

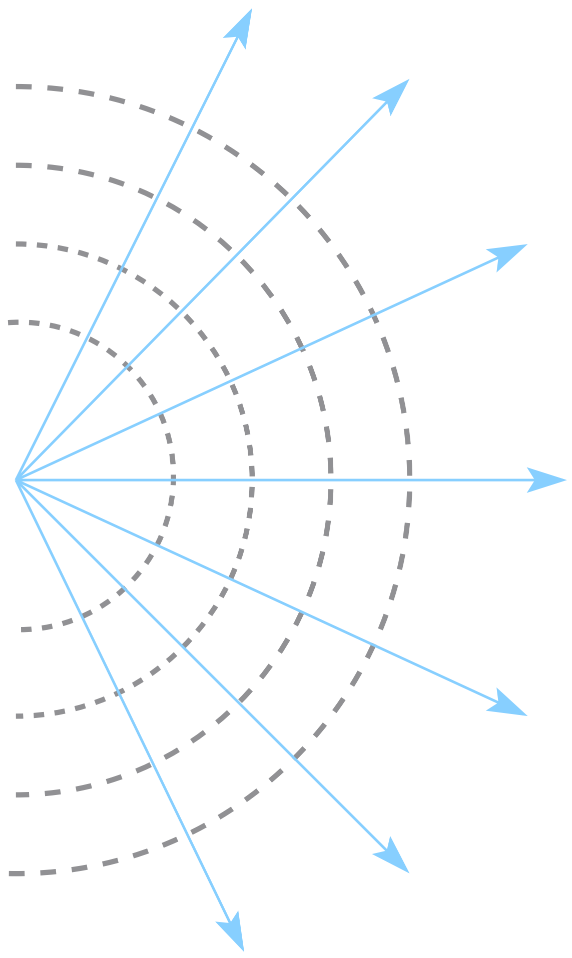
- La dirección de propagación es la del vector $\bar{\boldsymbol{E}} \times \bar{\boldsymbol{B}}$.
- Por lo tanto, la radiación electromagnética es transversal.
- Definiciones:

  Rayo: Línea en la dirección de propagación de la onda.

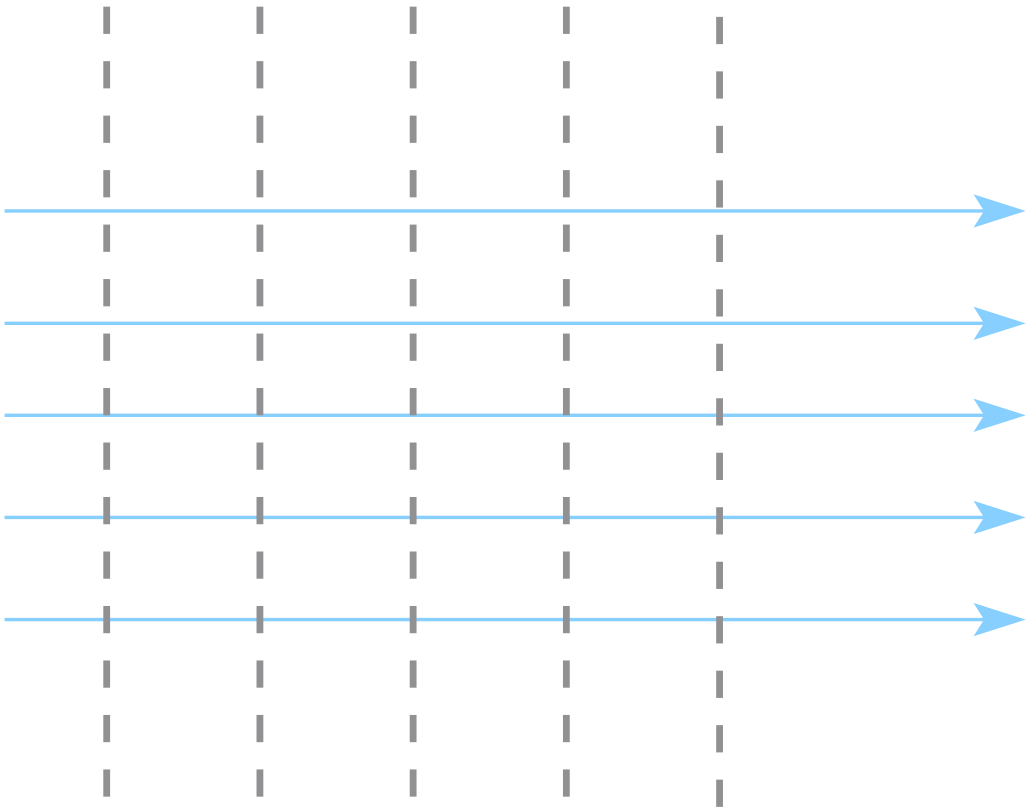
  Frente de onda: Superficie donde las perturbaciones están en fase.

  En un medio homogeneo e isotrópico, los rayos son líneas rectas.

- Ondas esféricas: los rayos salen de un punto y los frentes de onda son esféricos



- Ondas planas: rayos paralelos y frentes de ondas planos



Considera una onda electromagnética plana armónica con frecuencia $\nu = \omega/2\pi$:

$$\bar{E} = E_0\,\hat{\jmath}\,\operatorname{sen} k(x - ct)$$

El plano de polarización es aquél en el que oscila el campo eléctrico.

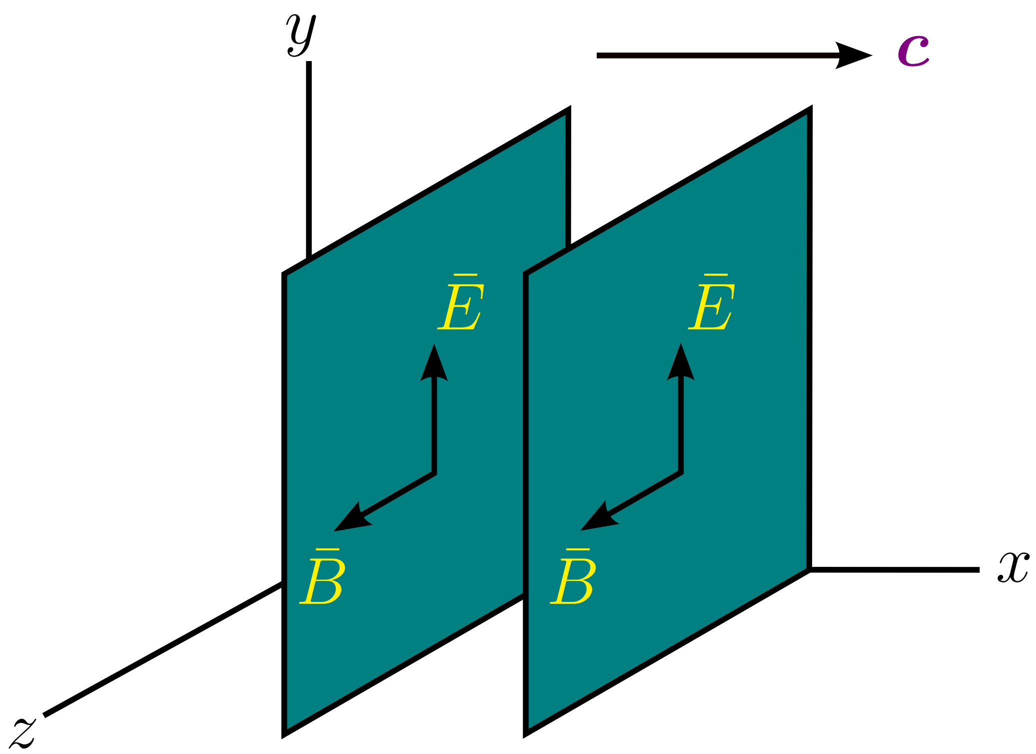
Considera una onda electromagnética plana armónica con frecuencia $\nu = \omega/2\pi$:

$$\bar{E} = E_0\,\hat{j}\,\mathrm{sen}\,k(x - ct)$$

El plano de polarización es aquél en el que oscila el campo eléctrico.

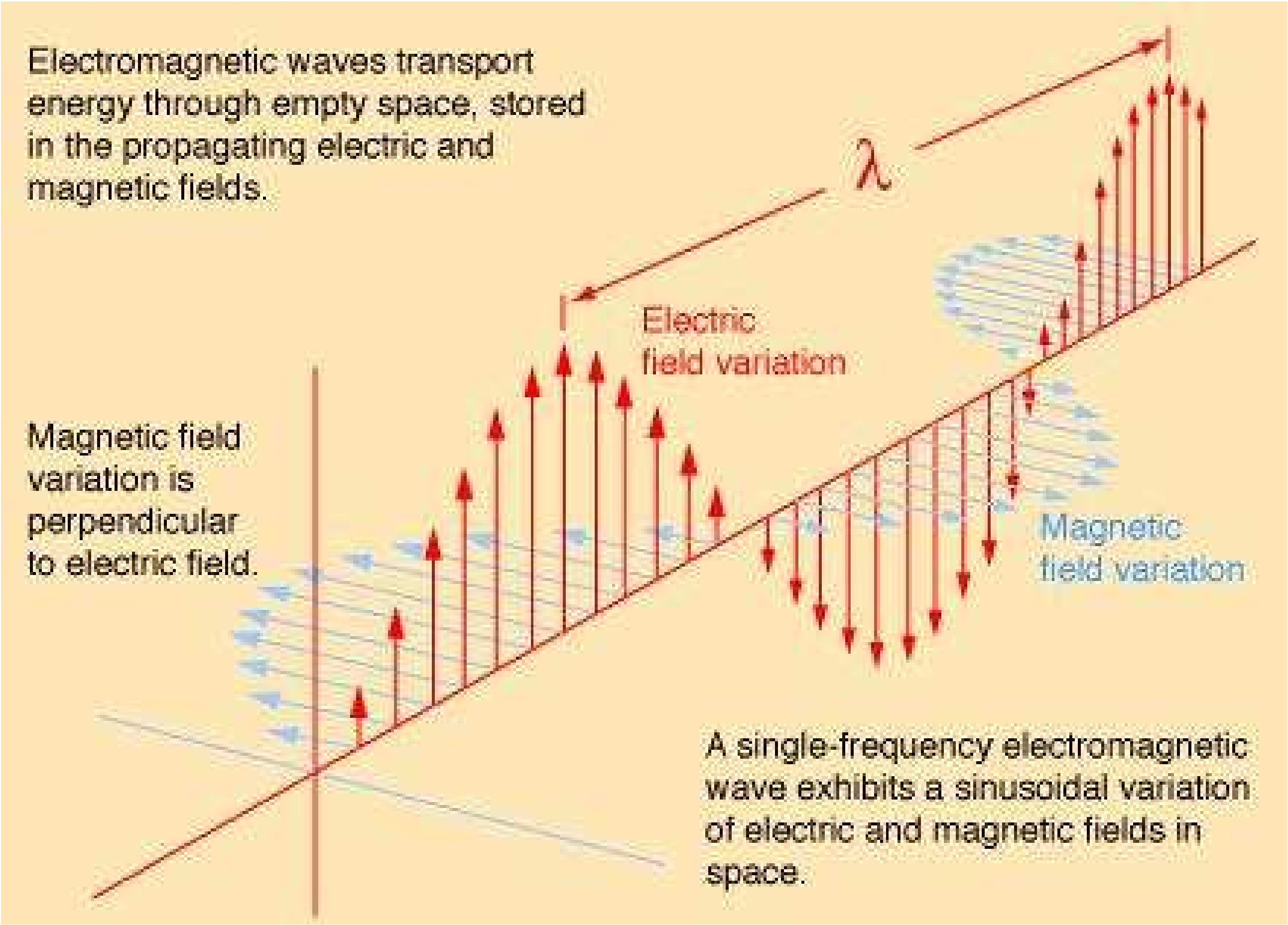
Ejercicios:

1. ¿Cuál es el plano de polarización en este ejemplo?
2. Escribe la expresión del correspondiente campo magnético.



$$\bar{B} = B_0\,\hat{k}\ \mathrm{sen}\,k(x - ct)$$

donde $B_0 = E_o/c$



Los vectores de campo eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación

Ejercicio:

Una onda luminosa plana armónica, polarizada linealmente, tiene una intensidad de campo eléctrico dada por

$$\bar{E}(z,t) = E_0\,\hat{\jmath}\,\cos\left\{\pi\,10^{15}\left[\left(\frac{z}{0.65c}\right) - t\right]\right\}$$

mientras viaja en una pieza de vidrio. Encuentra la frecuencia y la longitud de onda correspondiente.

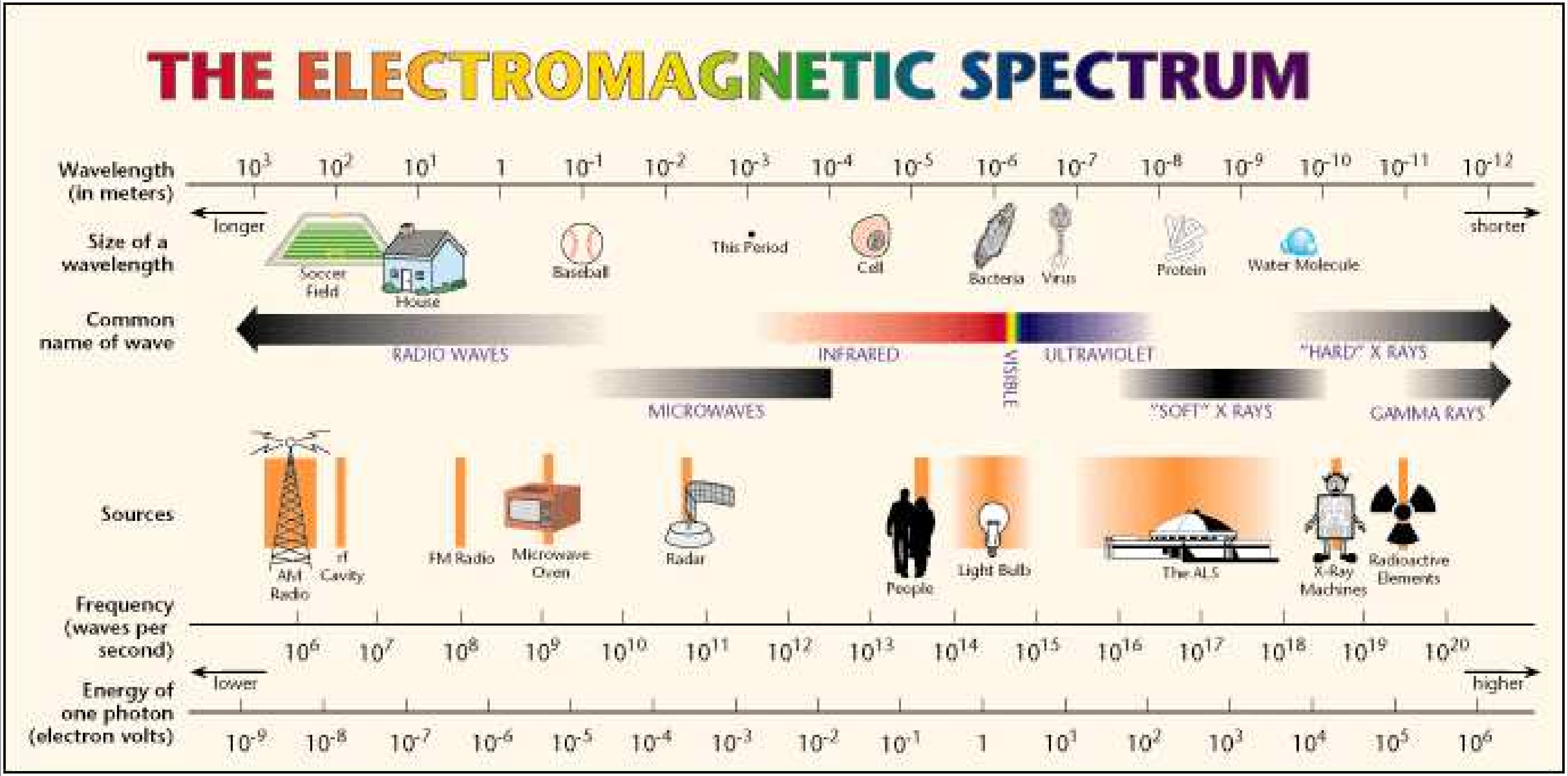
- La radiación electromagnética transporta energía y momento

Densidad de energía: $\mathcal{E} = \epsilon_0 E$

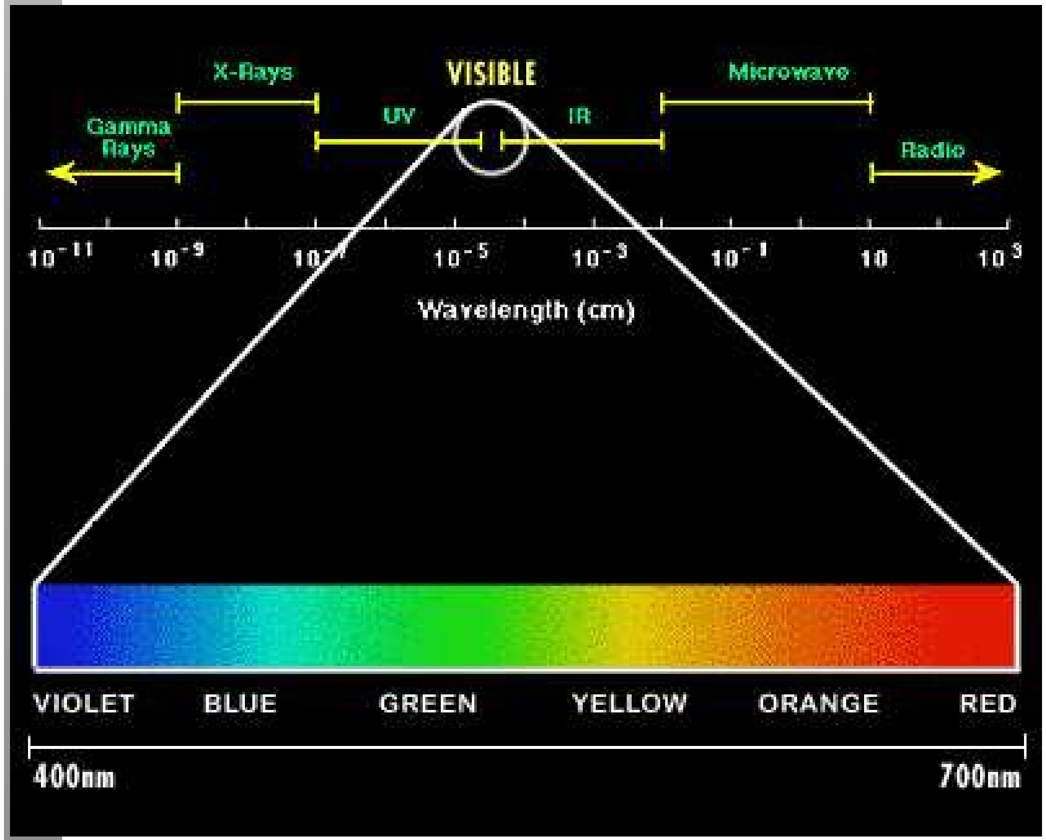
Intensidad: $I = c\epsilon_0 E^2$ (potencia/area)

Densidad de momento: $p = \mathcal{E}/c$ (en la dirección de propagación)

Espectro electromagnético



Tomado de: http://www.lbl.gov/MicroWorlds/ALSTool/EMSpec/EMSpec2.html



color	ν (10^{12} Hz)	λ (nm)
rojo	384–482	780–622
naranja	482–503	622–597
amarillo	503–520	597–577
verde	520–610	577–492
azul	610–659	492–455
violeta	659–769	455–390

- Las diferentes regiones del espectro electromagnético se usan para investigar diferentes procesos moleculares.
- Es posible estudiar las transiciones energéticas involucradas en los diferentes procesos.
  Por ejemplo:

espectroscopía
rotacional
vibracional
electrónica
resonancia magnética nuclear

interacción radiación $\leftrightarrow$ *materia*