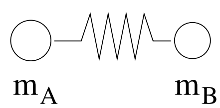
Problema sobre la dinámica de un sistema de dos partículas

Eugenia Corvera Poiré y Jesús Hernández Trujillo
Facultad de Química, UNAM

Se analiza la dinámica de un sistema de dos partículas y se interpreta como resultante de la interacción que ocurre entre los átomos que forman una molécula diatómica.

1. Considere que los átomos de masas m_A y m_B, respectivamente, están unidos mediante un resorte tal como se indica en la figura.



Demuestre que el momento lineal del sistema de partículas es constante en el tiempo.

Debido a que el sistema de partículas indicado en la figura – la molécula – no está sujeto a la acción de ninguna fuerza externa, las únicas fuerzas presentes son las que el resorte ejerce sobre los átomos. Además, por la tercera ley de Newton, la fuerza que actúa sobre el átomo A, F_A, es opuesta a la que actúa sobre el átomo B, F_B. Es decir

$$F_A = -F_B \,. \tag{1}$$

La segunda ley de Newton puede expresarse en términos del momento lineal, $p = mv$, de la siguiente manera:

$$F = m\frac{dv}{dt} = \frac{d\,[mv]}{dt}$$

La segunda de las igualdades anteriores es válida cuando la masa es constante. Por lo tanto,

$$F = \frac{d\left[mv\right]}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

Al escribir la segunda ley de Newton para cada una de las masas, se obtiene:

$$\frac{dp_A}{dt} = F_A \tag{2}$$

$$\frac{dp_B}{dt} = F_B \tag{3}$$

En estas expresiones, $p_A = m_A v_A$ y $p_B = m_B v_B$ son los momentos lineales de los átomos. Al utilizar las ecuaciones (1), (2) y (3), se obtiene:

$$\frac{dp_A}{dt} = -\frac{dp_B}{dt}$$

de donde

$$\frac{dp_A}{dt} + \frac{dp_B}{dt} = 0$$

Y como la suma de las derivadas de dos funciones es la derivada de la suma de las funciones, entonces:

$$\frac{d\left[p_A + p_B\right]}{dt} = 0 \tag{4}$$

Debido a que la derivada anterior es igual a cero, se concluye que $p_A + p_B$ es constante en el tiempo; es decir, el momento lineal de la molécula, $p_T = p_A + p_B$, es constante pues no hay ninguna fuerza externa que actúe sobre ella. Este es un caso particular del teorema de conservación de momento lineal el cual establece que, en ausencia de fuerzas externas, el momento lineal de un sistema de partículas es constante (se conserva).

2. Demuestre que, en ausencia de fuerzas externas, el centro de masa de la molécula se mueve a velocidad constante.

   En términos de las masas y las velocidades, la igualdad (4) es:

$$\frac{d\left[m_A v_A + m_B v_B\right]}{dt} = 0 \tag{5}$$

   También es posible expresar la igualdad anterior en términos de las posiciones x_A y x_B de los átomos. Para esto, se sustituye

$$v_A = \frac{dx_A}{dt} \qquad \text{y} \qquad v_B = \frac{dx_B}{dt}$$

en la ecuación (5):

$$\frac{d^2\left[m_A x_A + m_B x_B\right]}{dt^2} = 0\,. \tag{6}$$

Es conveniente expresar el movimiento de los átomos con respecto a las coordenadas del centro de masa de la molécula, x_{CM}, el cual se calcula de la siguiente manera:

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{M}\,, \tag{7}$$

donde $M = m_A + m_B$ es la masa de la molécula.

De (7):

$$m_A x_A + m_B x_B = M x_{CM}\,.$$

Al sustituir esta expresión en (6) se obtiene:

$$M\frac{d^2 x_{CM}}{dt^2} = 0\,, \tag{8}$$

y como $M \neq 0$, entonces

$$\frac{d^2 x_{CM}}{dt^2} = 0\,.$$

Por la definición de segunda derivada:

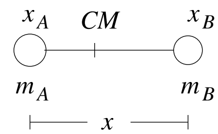
$$\frac{d^2 x_{CM}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\left[x_{CM}\right]}{dt}\right) = 0\,.$$

Como $d\left[x_{CM}\right]/dt$ es la velocidad del centro de masa de la molécula, v_{CM}, entonces:

$$\frac{dv_{CM}}{dt} = 0\,. \tag{9}$$

Por lo tanto, el centro de masa se mueve a velocidad constante. Este resultado es consistente con la observación de que el sistema se encuentra en ausencia de fuerzas externas.

3. Exprese las posiciones de los átomos A y B en términos del desplazamiento, x, mostrado en la figura.



Como el centro de masa se mueve a velocidad constante, es posible utilizarlo como sistema de referencia inercial y, por lo tanto, colocamos allí el origen.

En este caso, se sustituye $x_{CM} = 0$ en la ecuación (7):

$$0 = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{M},$$

de donde se obtiene

$$m_A x_A + m_B x_B = 0\,.$$

Esta igualdad puede reescribirse como

$$m_A x_A = -m_B x_B\,. \tag{10}$$

A continuación se define el desplazamiento de B respecto a A:

$$x = x_B - x_A\,. \tag{11}$$

Se trata de la posición del átomo B medida desde el átomo A.

A partir de las ecuaciones (10) y (11), es posible escribir x_A y x_B en términos de x. Primero, despejamos x_B de la ecuación (10):

$$x_B = -\frac{m_A x_A}{m_B}$$

y lo sustituimos en (11):

$$x = -\frac{m_A x_A}{m_B} - x_A = -\frac{m_A x_A + m_B x_A}{m_B} = -\frac{(m_B + m_A) x_A}{m_B} = -\frac{M}{m_B} x_A\,.$$

Al despejar x_A se obtiene:

$$x_A = -\frac{m_B}{M} x\,. \tag{12}$$

Ahora, se despeja x_A de la ecuación (10):

$$x_A = -\frac{m_B x_B}{m_A}$$

y se sustituye en (11):

$$x = x_B + \frac{m_B x_B}{m_A} = \frac{m_A x_B + m_B x_B}{m_A} = \frac{(m_A + m_B) x_B}{m_A} = \frac{M}{m_A} x_B \, .$$

De aquí se obtiene

$$x_B = \frac{m_A}{M} x \, . \tag{13}$$

4. Exprese las velocidades de los átomos A y B en términos de la razón de cambio de la posición relativa entre los átomos.

   A partir de la definición de x, ecuación (11), $v = dx/dt$ es la razón de cambio de la posición del átomo B medida desde el átomo A. Es decir, v es la razón cambio de la posición relativa entre los átomos. Además, las velocidades v_A y v_B pueden ser expresadas en términos de v. Para esto, es necesario obtener la derivadas de (12) y (13):

$$v_A = -\frac{m_B}{M} v \tag{14}$$

$$v_B = \frac{m_A}{M} v \tag{15}$$

5. Exprese la energía cinética de la molécula en términos de la masa reducida y de la razón de cambio del desplazamiento.

   La energía cinética de la molécula es la suma de las energías cinéticas de los átomos que la forman:

$$E_c = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \tag{16}$$

   Al sustituir (14) y (15) en (16), se obtiene:

$$E_c = \frac{1}{2} m_A \left(-\frac{m_B}{M} v \right)^2 + \frac{1}{2} m_B \left(\frac{m_A}{M} v \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B^2}{M^2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{m_A^2 m_B}{M^2} v^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_A m_B (m_A + m_B)}{M^2} v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B M}{M^2} v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{M} v^2$$

Definamos ahora la **masa reducida** del sistema de dos partículas:

$$\mu = \frac{m_A m_B}{M} \tag{17}$$

La energía cinética de la molécula, en términos de la masa reducida y de v, es

$$E_c = \frac{1}{2}\mu\, v^2 \tag{18}$$

6. Exprese la energía mecánica de la molécula.

   La energía mecánica de la molécula es la suma de la energía cinética más la energía potencial. La ecuación (18) muestra que la energía cinética del sistema de dos partículas de masas m_A y m_B y con velocidades v_A y v_B, respectivamente, es equivalente a la de una partícula de masa μ con velocidad v. Además, la energía potencial de la molécula depende sólo de la posición relativa de los átomos, es decir, de la distancia entre ellos, r, la cual se calcula como la norma o magnitud de x; es decir, $r = |x|$. La energía potencial del sistema de partículas está dada por la función $V(r)$. Por esta razón, la energía mecánica de la molécula con el sistema de referencia inercial ubicado en el centro de masa es

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + V(r)\,. \tag{19}$$