
Teoría de catástrofes

Jesús Hernández Trujillo
Facultad de Química, UNAM

Marzo de 2012

Contenido

- Espacio de configuración.
- Formas cuadráticas y cúbicas.
- Lemas de Morse y de Splitting.
- Variedades diferenciales y transversalidad.
- Teoría de catástrofes:
 - Clasificación de Thom.
 - Catástrofes de pliege y de cúspide.
 - Catástrofe elíptica umbílica.

Contenido

- Espacio de configuración.
- Formas cuadráticas y cúbicas.
- Lemas de Morse y de Splitting.
- Variedades diferenciales y transversalidad.
- Teoría de catástrofes:
 - Clasificación de Thom.
 - Catástrofes de pliege y de cúspide.
 - Catástrofe elíptica umbílica.

Referencias

1. T. Poston, I. Stewart
Catastrophe theory and its applications
Dover Publications Inc., 1978
2. R. Gilmore
Catastrophe theory for scientists and engineers
Dover Publications Inc., 1981

Espacio de configuración

- El espacio de control en la teoría de átomos en moléculas es el espacio de configuraciones nucleares

Ver: H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison–Wesley, 1980

Espacio de configuración

- El espacio de control en la teoría de átomos en moléculas es el espacio de configuraciones nucleares
- La configuración de un sistema está dada por los valores de n coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n .

Ver: H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison–Wesley, 1980

Espacio de configuración

- El espacio de control en la teoría de átomos en moléculas es el espacio de configuraciones nucleares
- La configuración de un sistema está dada por los valores de n coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n .
- Espacio de configuración:

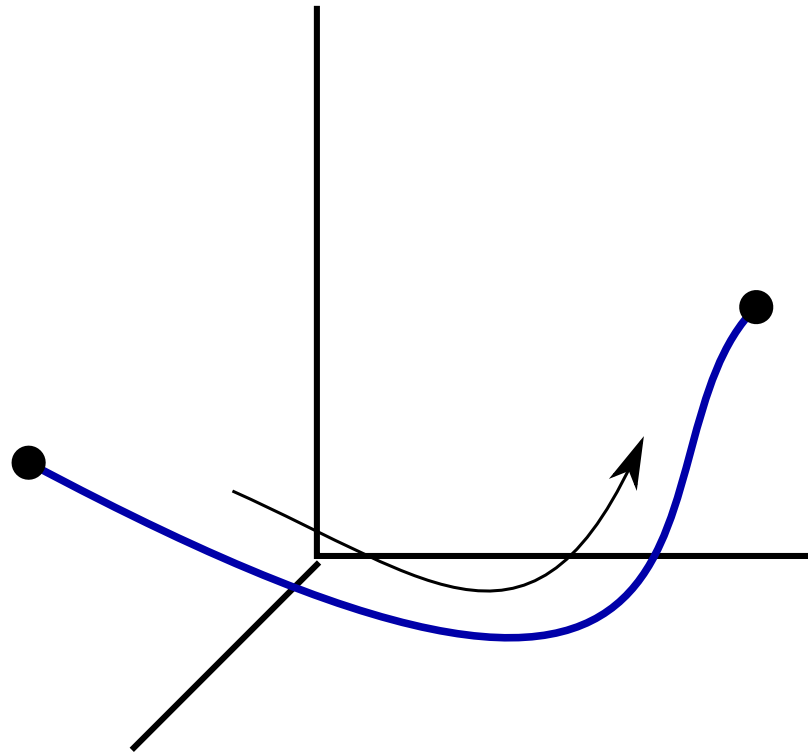
$$\mathfrak{R}^n = \{(q_1, q_2, \dots, q_n)\}$$

donde hay n grados de libertad.

Ver: H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison–Wesley, 1980

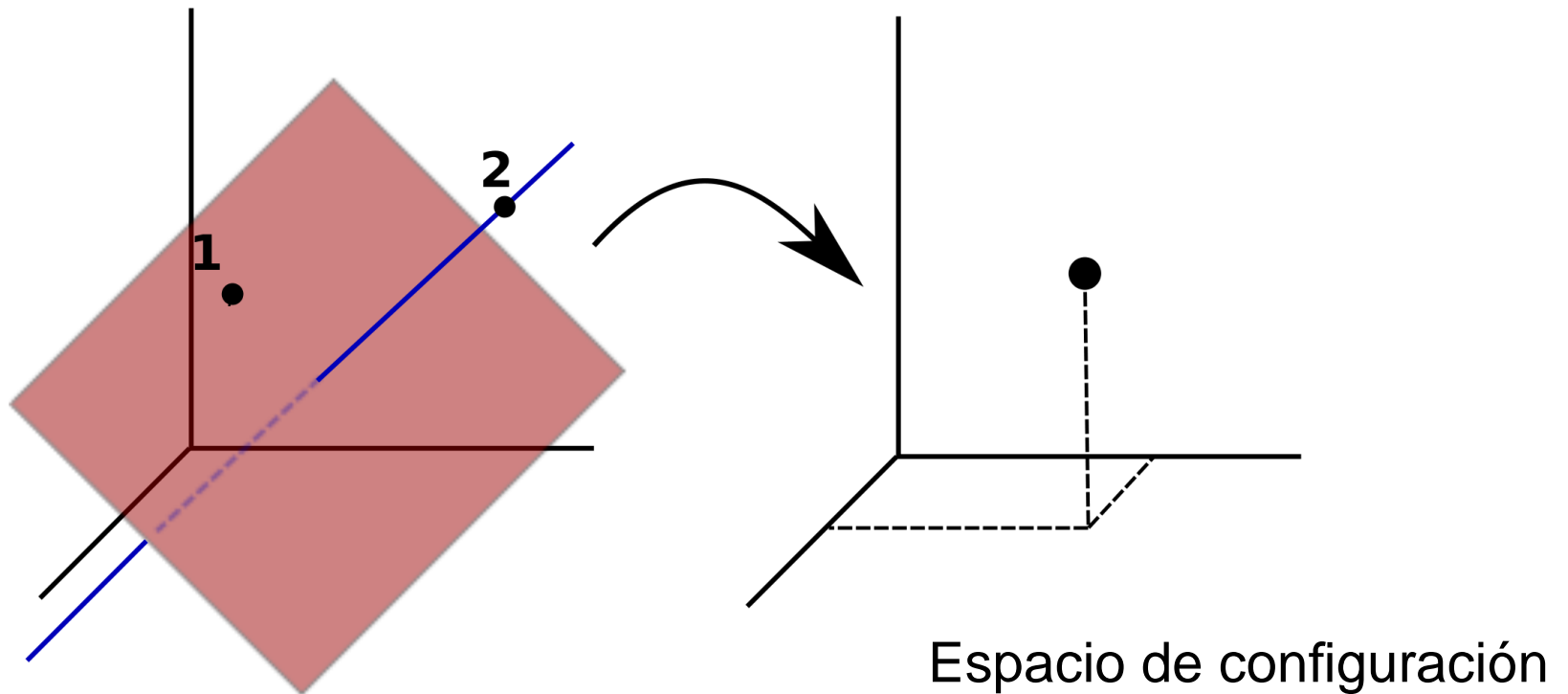
-
- El movimiento del sistema se describe mediante una trayectoria en \mathfrak{R}^n

Esquemáticamente:



Ejemplo

Una partícula se mueve en un plano y otra en una recta perpendicular a éste.



Formas cuadráticas

En n variables:

$$q(x) = \sum_{ij} \lambda_{ij} x_i x_j$$

En forma matricial:

$$q(x) = x \Lambda x^T, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (\Lambda)_{ij} = \lambda_{ij}$$

Al reemplazar Λ por la matriz simétrica

$$M = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda^T)$$

es posible diagonalizar M .

-
- Toda forma cuadrática en n variables puede ser reducida, mediante una transformación lineal no singular de las variables, a la forma

$$d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2$$

-
- Toda forma cuadrática en n variables puede ser reducida, mediante una transformación lineal no singular de las variables, a la forma

$$d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2$$

- Al hacer $z_i = \sqrt{d_i} y_i$, se obtiene

$$z_1^2 + \dots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \dots - z_\omega^2$$

-
- Toda forma cuadrática en n variables puede ser reducida, mediante una transformación lineal no singular de las variables, a la forma

$$d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2$$

- Al hacer $z_i = \sqrt{d_i} y_i$, se obtiene

$$z_1^2 + \dots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \dots - z_\omega^2$$

Definiciones:

rango : ω

firma : $\sigma = 2r - \omega = r - (\omega - r)$

Cuatro tipos de formas cuadráticas para
 $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$:

$$u^2 + v^2: \quad (\omega, \sigma) = (2, 2)$$

$$u^2 - v^2: \quad (2, 0)$$

$$-u^2 - v^2: \quad (-2, 0)$$

$$u^2: \quad (1, 1)$$

$$-u^2: \quad (1, -1)$$

Formas cúbicas

En dos variables:

$$c(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{R}$$

Formas cúbicas

En dos variables:

$$c(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{R}$$

Cuatro tipos de formas cúbicas:

$$u^2 v - v^2$$

$$u^2 v + v^3$$

$$-u^2 - v^2$$

$$u^2 v$$

$$-u^3$$

Teorema (punto crítico de Morse):

Sean $u \in \mathfrak{R}^n$ un punto crítico no degenerado^a de la función suave $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, y $U \subset \mathfrak{R}^n$ un conjunto abierto. Existe un sistema local de coordenadas $\{y_1, \dots, y_n\} \subset U$ con $y_i(u) = 0 \quad \forall i$, tal que

$$f = f(u) - y_1^2 - \dots - y_l^2 + y_{l+1}^2 + \dots + y_n^2$$

$\forall u \in U$.

^aAquél cuyo rango del Hessiano cumple: $\omega = n$

Teorema (punto crítico de Morse):

Sean $u \in \mathfrak{R}^n$ un punto crítico no degenerado^a de la función suave $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, y $U \subset \mathfrak{R}^n$ un conjunto abierto. Existe un sistema local de coordenadas $\{y_1, \dots, y_n\} \subset U$ con $y_i(u) = 0 \quad \forall i$, tal que

$$f = f(u) - y_1^2 - \dots - y_l^2 + y_{l+1}^2 + \dots + y_n^2$$

$\forall u \in U$. Es decir

- Todo punto crítico no degenerado se puede transformar en una l -silla de Morse.
- Cuando $l = n$ se trata de un máximo; si $l = 0$, de un mínimo.

^aAquél cuyo rango del Hessiano cumple: $\omega = n$

Teoría de catástrofes

Se analiza el cambio de $V : X \rightarrow \mathfrak{R}$, donde X es una variedad (usualmente \mathfrak{R}^n).

Cuando se involucra un parámetro c :

$$V : X \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$$

tal que $(x, c) \rightarrow V(x, c) = V_c(x)$.

Se analizan familias de funciones $DV_c : X \rightarrow \mathfrak{R}$:

$$\partial_X V : X \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$$

tales que $(x, c) \rightarrow \partial_X V(x, c) = DV_c(X)$
(D : derivada en la dirección de X)

Teoría de catástrofes

Se analiza el cambio de $V : X \rightarrow \mathfrak{R}$, donde X es una variedad (usualmente \mathfrak{R}^n).

Cuando se involucra un parámetro c :

$$V : X \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$$

tal que $(x, c) \rightarrow V(x, c) = V_c(x)$.

Se analizan familias de funciones $DV_c : X \rightarrow \mathfrak{R}$:

$$\partial_X V : X \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$$

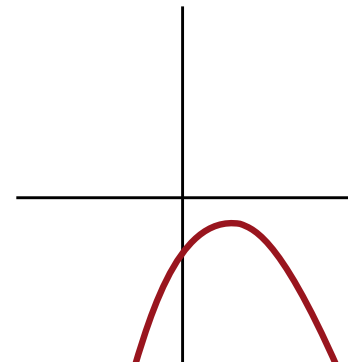
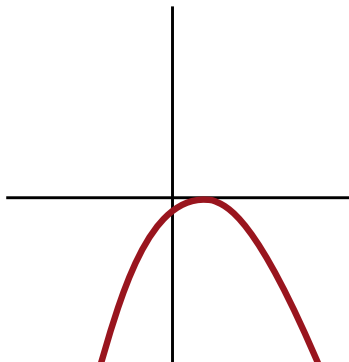
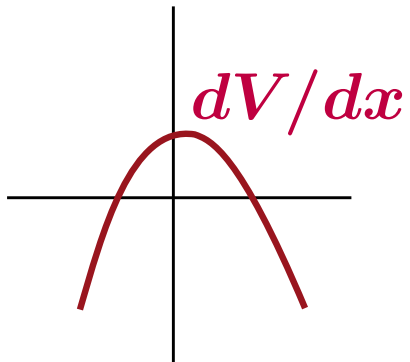
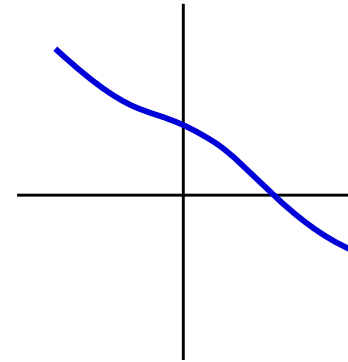
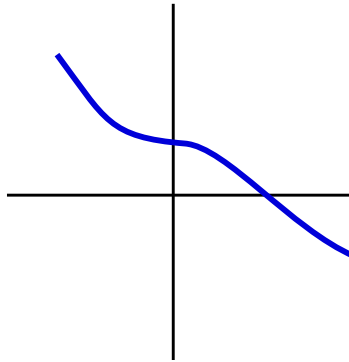
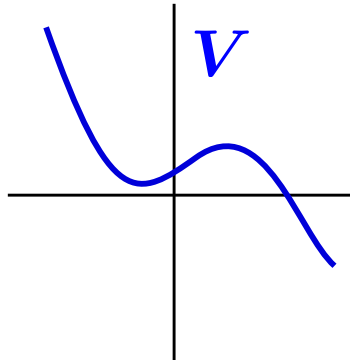
tales que $(x, c) \rightarrow \partial_X V(x, c) = DV_c(X)$

(D : derivada en la dirección de X)

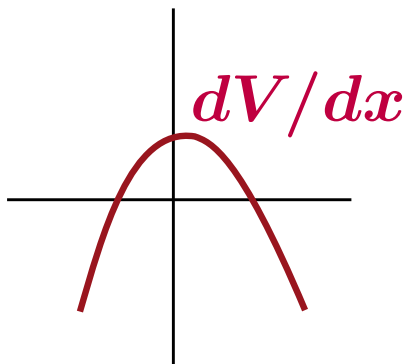
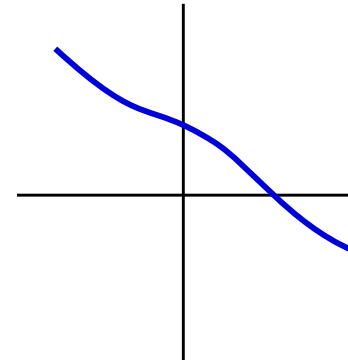
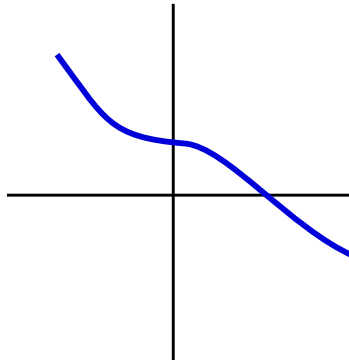
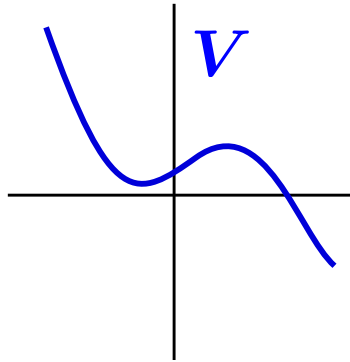
¿Cómo cambian de posición

los puntos críticos al cambiar los parámetros de control?

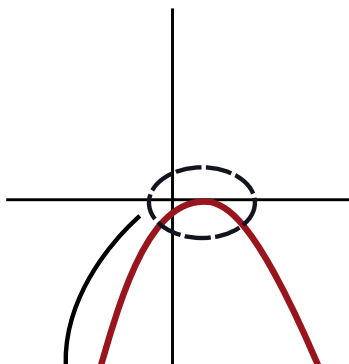
Ejemplo:



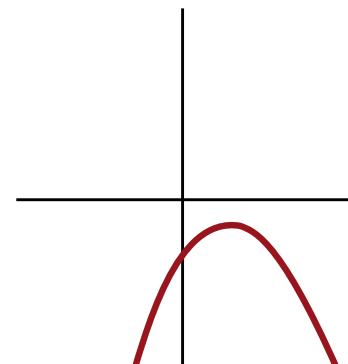
Ejemplo:



$HV|_c \neq 0$



$HV|_c$ singular



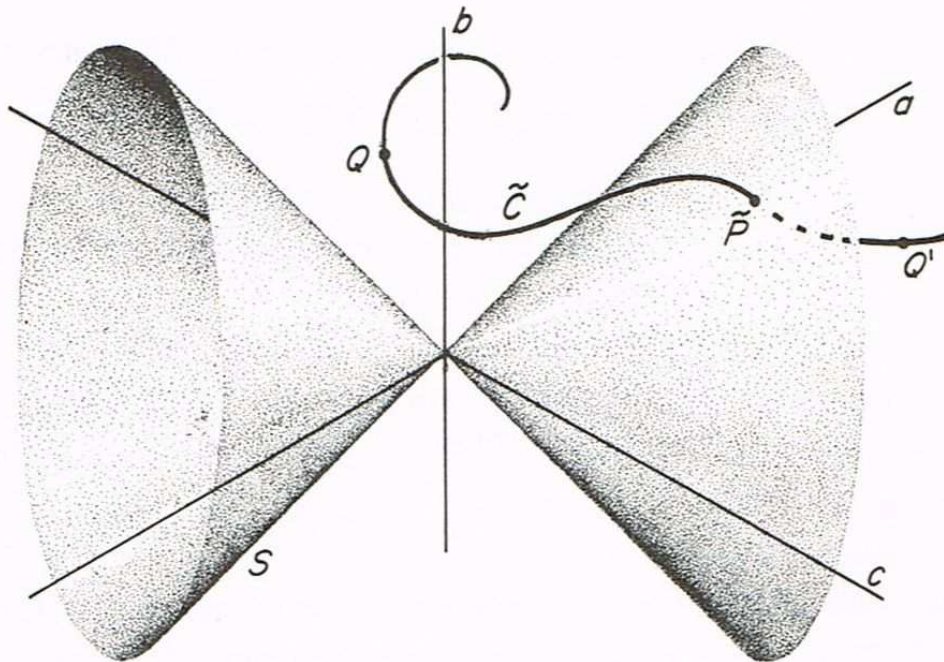
puntos regulares

$\partial_X V$ no transversa con línea 0

Considerar ahora la función

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

Gráficamente, al seguir una curva (a, b, c) al variar el parámetro se obtiene el tipo de forma cuadrática



cono discriminante

Clasificación de Thom

Teorema

Una familia de k parámetros de funciones suaves $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k < 5$ es estructuralmente estable y equivalente localmente a una de las siguientes formas:

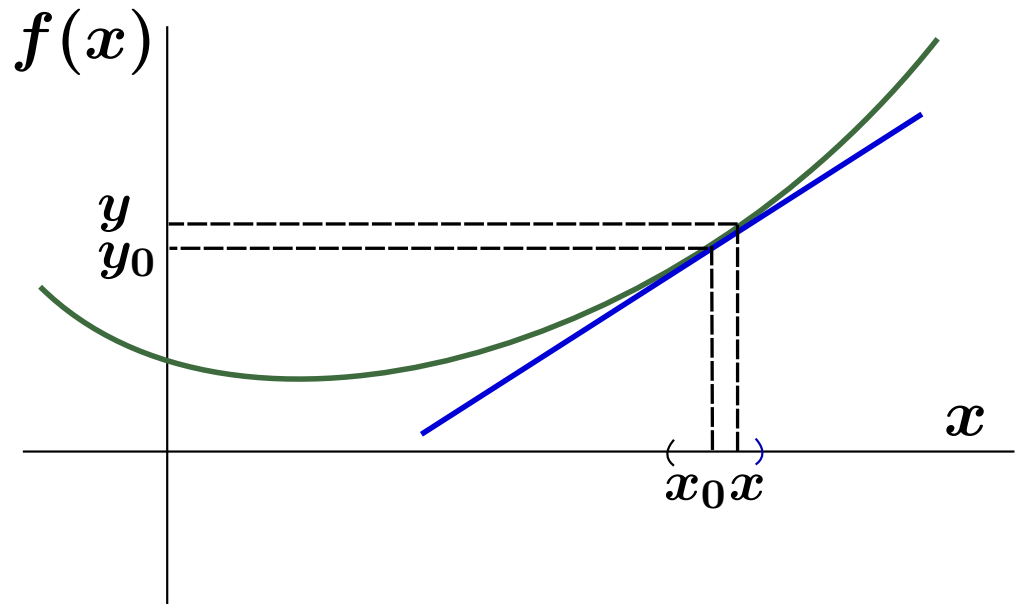
- Formas estables (no cambian al variar k)

1. No es un punto crítico: u_1 .

\exists un cambio suave de coordenadas tal que

$$f \rightarrow m(x - x_0) + y_0$$

$$\downarrow$$
$$mx' \rightarrow u$$



Clasificación de Thom

Teorema

Una familia de k parámetros de funciones suaves $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k < 5$ es estructuralmente estable y equivalente localmente a una de las siguientes formas:

- Formas estables (no cambian al variar k)

1. No es un punto crítico: u_1 .

- Es un punto crítico no degenerado (Morse)

$$u_1^2 + \dots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2$$

- Catástrofes (hay c_1, c_2, \dots, c_5 parámetros)

1. Tipo cúspide

nombre	k	germen (GC)	perturbación ($pert$)
Pliegue	1	u_1^3	$c_1 u_1$
Cúspide:	2	$\pm u_1^4$	$c_2 u_2^2 + c_1 u_1$
Cola de golondrina:	3	u_1^5	$c_3 u_1^3 + c_2 u_2^2 + c_1 u_1$
Mariposa	4	$\pm u_1^6$	$c_4 u_1^4 + c_3 u_1^3 + c_2 u_1^2 + c_1 u_1$
Tienda india	5	u_1^7	$c_5 u_1^5 + c_4 u_1^4 + c_3 u_1^3 + c_2 u_2^2 + c_1 u_1$

- Catástrofes (hay c_1, c_2, \dots, c_5 parámetros)

2. Tipo umbílica

nombre	k	germen (GC)	perturbación ($pert$)
Umbílica elíptica	3	$u_1^2 u_2 - u_2^3$	$c_3 u_1^2 + c_2 u_2 + c_1 u_1$
Umbílica hiperbólica	3	$u_1^2 u_2 + u_2^3$	$c_3 u_1^2 + c_2 u_2 + c_1 u_1$
Umbílica parabólica	4	$\pm(u_1^2 u_2 + u_2^4)$	$c_4 u_2^2 + c_3 u_1^2 + c_2 u_2 + c_1 u_1$
Segunda umbílica elíptica:	5	$u_1^2 u_2 - u_2^5$	$c_5 u_2^3 + c_4 u_2^2 + c_3 u_1^2 + c_2 u_2 + c_1 u_1$
Segunda umbílica hiperbólica:	5	$u_1^2 u_2 + u_2^5$	$c_5 u_2^3 + c_4 u_2^2 + c_3 u_1^2 + c_2 u_2 + c_1 u_1$
Umbílica simbólica	4	$\pm(u_1^3 + u_2^4)$	$c_5 u_1 u_2^2 + c_4 u_2^2 + c_3 u_1 u_2 + c_2 u_2 + c_1 u_1$

En resumen:

- $DV \neq 0: V = u_1.$

En resumen:

- $DV \neq 0$: $V = u_1$.
- $DV = 0$ y $\det(HV) \neq 0$: Lema de Morse.

En resumen:

- $DV \neq 0$: $V = u_1$.
- $DV = 0$ y $\det(HV) \neq 0$: Lema de Morse.
- $DV = 0$ y $\det(HV) = 0$: $V(x, c)$ con $x \in \mathfrak{R}^n$, $c \in \mathfrak{R}^k$ es de la forma (lema de splitting):

$$V(u; c) = f_{NM}(u_1, \dots, u_l, c) + \sum_{j=l+1}^n \lambda_j u_j^2$$

La catástrofe ocurre en $c = c^0$.

En resumen:

→ Si $k \leq 5$

$$V = cat(l, k) + \sum_{j=l+1}^n \lambda_j u_j^2$$

donde

$$cat(l, k) = GC(l) + \text{pert}(l, k)$$

*afecta el comportamiento
cualitativo de V*

Ejemplo:

- Considerar una función $V : \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (10 variables, 3 parámetros de control).
- Considerar que (x_1^0, \dots, x_{10}^0) es un punto crítico singular y que HV tiene rango 8, con 5 valores propios positivos y 3 negativos.
¿Cuál es el carácter local de $V(x, c)$?

Ejemplo:

- Considerar una función $V : \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (10 variables, 3 parámetros de control).
- Considerar que (x_1^0, \dots, x_{10}^0) es un punto crítico singular y que HV tiene rango 8, con 5 valores propios positivos y 3 negativos.
¿Cuál es el carácter local de $V(x, c)$?

En este caso, $l = 2$, $k = 3$.

Por lo tanto, se trata de la catástrofe umbílica elíptica o la hiperbólica:

$$V = u_1^2 u_2 \pm u_2^3 + c_3 u_1^2 + c_2 u_2 + t_c u_1 + \sum_{j=3}^{10} \lambda_j u_j^2$$

Además:

Sea la familia de funciones $V : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}$,
 $V(x, c) = V(c)$, donde $x \in \mathfrak{R}^n$, $c \in \mathfrak{R}^k$.

● Variedad catástrofe:

$$M = \{x \in S \mid DV_c(x) = 0\}$$

Además:

Sea la familia de funciones $V : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}$,
 $V(x, c) = V(c)$, donde $x \in \mathfrak{R}^n$, $c \in \mathfrak{R}^k$.

- Variedad catástrofe:

$$M = \{x \in S \mid DV_c(x) = 0\}$$

- El conjunto de puntos $c \in \mathfrak{R}^k$ que parametrizan a la familia de funciones con puntos críticos degenerados se llama conjunto de bifurcación, B .

Además:

Sea la familia de funciones $V : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}$,
 $V(x, c) = V(c)$, donde $x \in \mathfrak{R}^n$, $c \in \mathfrak{R}^k$.

- Variedad catástrofe:

$$M = \{x \in S \mid DV_c(x) = 0\}$$

- El conjunto de puntos $c \in \mathfrak{R}^k$ que parametrizan a la familia de funciones con puntos críticos degenerados se llama conjunto de bifurcación, B .
- B divide \mathfrak{R}^k en conjuntos abiertos.

Además:

Sea la familia de funciones $V : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}$,
 $V(x, c) = V(c)$, donde $x \in \mathfrak{R}^n$, $c \in \mathfrak{R}^k$.

- Variedad catástrofe:

$$M = \{x \in S \mid DV_c(x) = 0\}$$

- El conjunto de puntos $c \in \mathfrak{R}^k$ que parametrizan a la familia de funciones con puntos críticos degenerados se llama conjunto de bifurcación, B .
- B divide \mathfrak{R}^k en conjuntos abiertos.
- La separatriz define regiones de funciones tipo Morse.

Catástrofe de pliege

La forma general de la catástrofe es

$$V(x, a) = V_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$$

El parámetro a provoca el cambio catastrófico en $V_a(x)$.

Catástrofe de pliege

La forma general de la catástrofe es

$$V(x, a) = V_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$$

El parámetro a provoca el cambio catastrófico en $V_a(x)$.

La variedad catástrofe M se obtiene al resolver

$$\frac{dV_a(x)}{dx} = x^2 + a = 0$$

Catástrofe de pliege

La forma general de la catástrofe es

$$V(x, a) = V_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$$

El parámetro a provoca el cambio catastrófico en $V_a(x)$.

La variedad catástrofe M se obtiene al resolver

$$\frac{dV_a(x)}{dx} = x^2 + a = 0$$

Se trata de la parábola

$$a = -x^2$$

-
- Además:

$$\frac{d^2 V_a}{dx^2} = 2x$$

-
- Además:

$$\frac{d^2 V_a}{dx^2} = 2x$$

- Es decir, HV_a es degenerado en $x = 0$.

-
- Además:

$$\frac{d^2V_a}{dx^2} = 2x$$

- Es decir, HV_a es degenerado en $x = 0$.
- El conjunto de bifurcación es el **punto de pliegue**,
 $a = 0$.

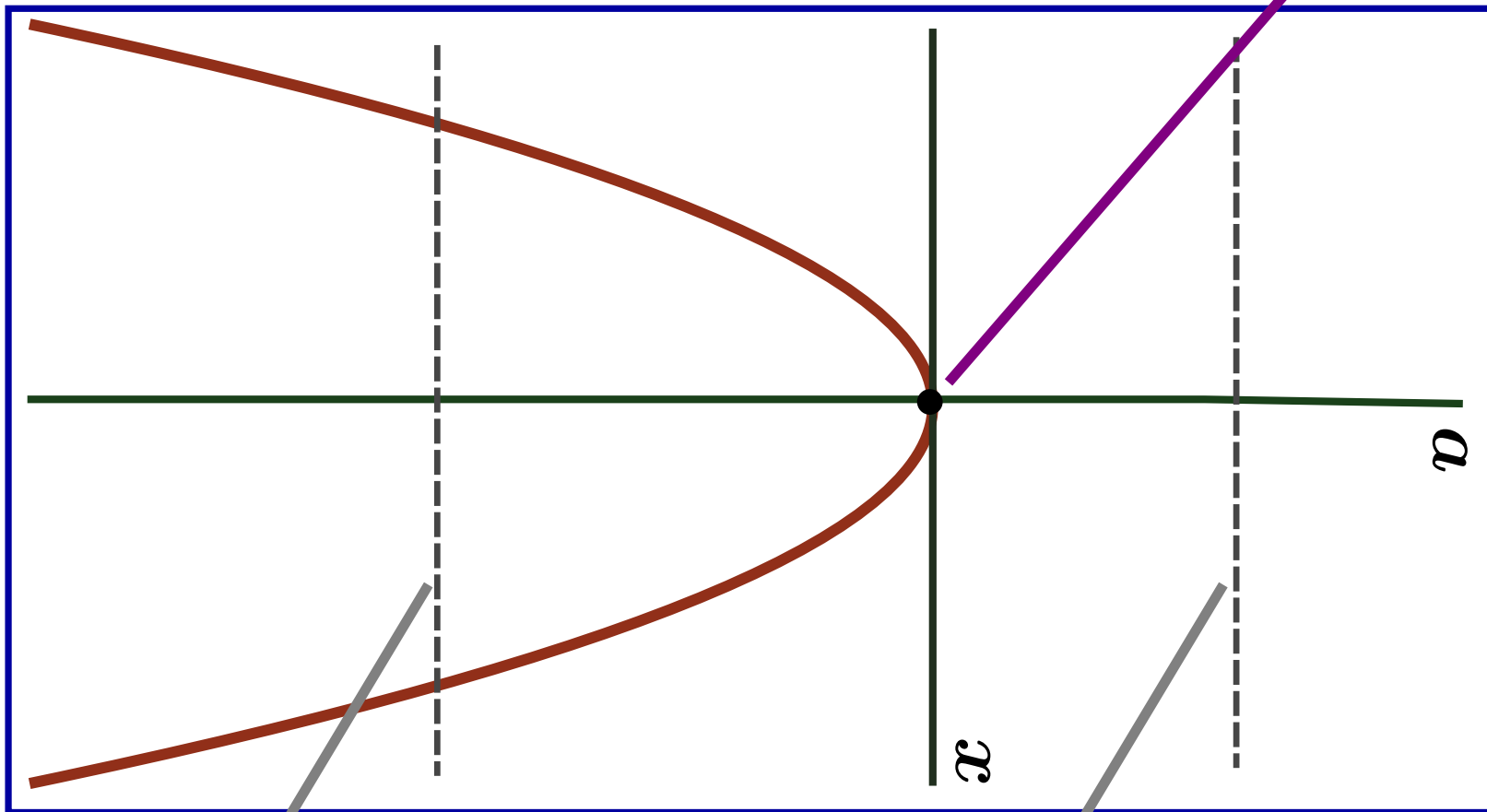
-
- Además:

$$\frac{d^2 V_a}{dx^2} = 2x$$

- Es decir, HV_a es degenerado en $x = 0$.
- El conjunto de bifurcación es el **punto de pliegue**, $a = 0$.
- El punto aislado $a = 0$ es la separatriz en el espacio de control entre funciones cualitativamente diferentes.

Gráficamente:

*punto de pliegue
(separatriz)*

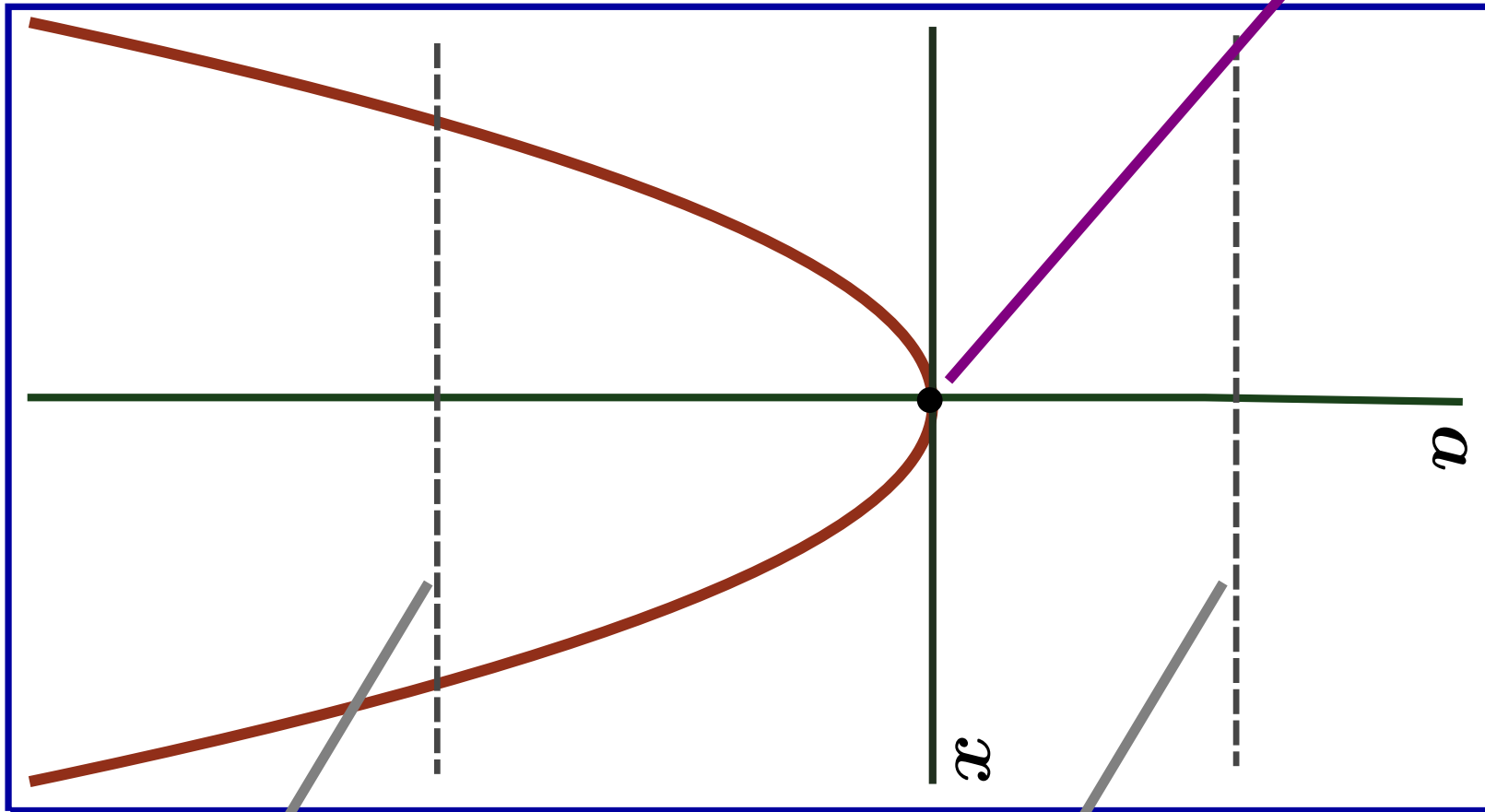


dos puntos críticos

cero puntos críticos

Gráficamente:

*punto de pliegue
(separatriz)*



dos puntos críticos

cero puntos críticos

**En la
TCAEM,
esta
catástrofe
ocurre al
romper un
anillo**

Catástrofe de cúspide

La forma general de la catástrofe es

$$V(x, a) = V_a(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$$

La variedad catástrofe se obtiene al resolver

$$\frac{dV_{ab}(x)}{dx} = x^3 + ax + b = 0$$

Las degeneraciones de los puntos críticos se obtienen a partir de

$$\begin{aligned}d^2V_{ab}(x)/dx^2 &= 3x^2 + a = 0 \\d^3V_{ab}(x)/dx^3 &= 6x = 0\end{aligned}$$

Por ejemplo, las dos primeras condiciones implican

$$a = -3x^2, \quad b = 2x^3$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$$

Gráficamente

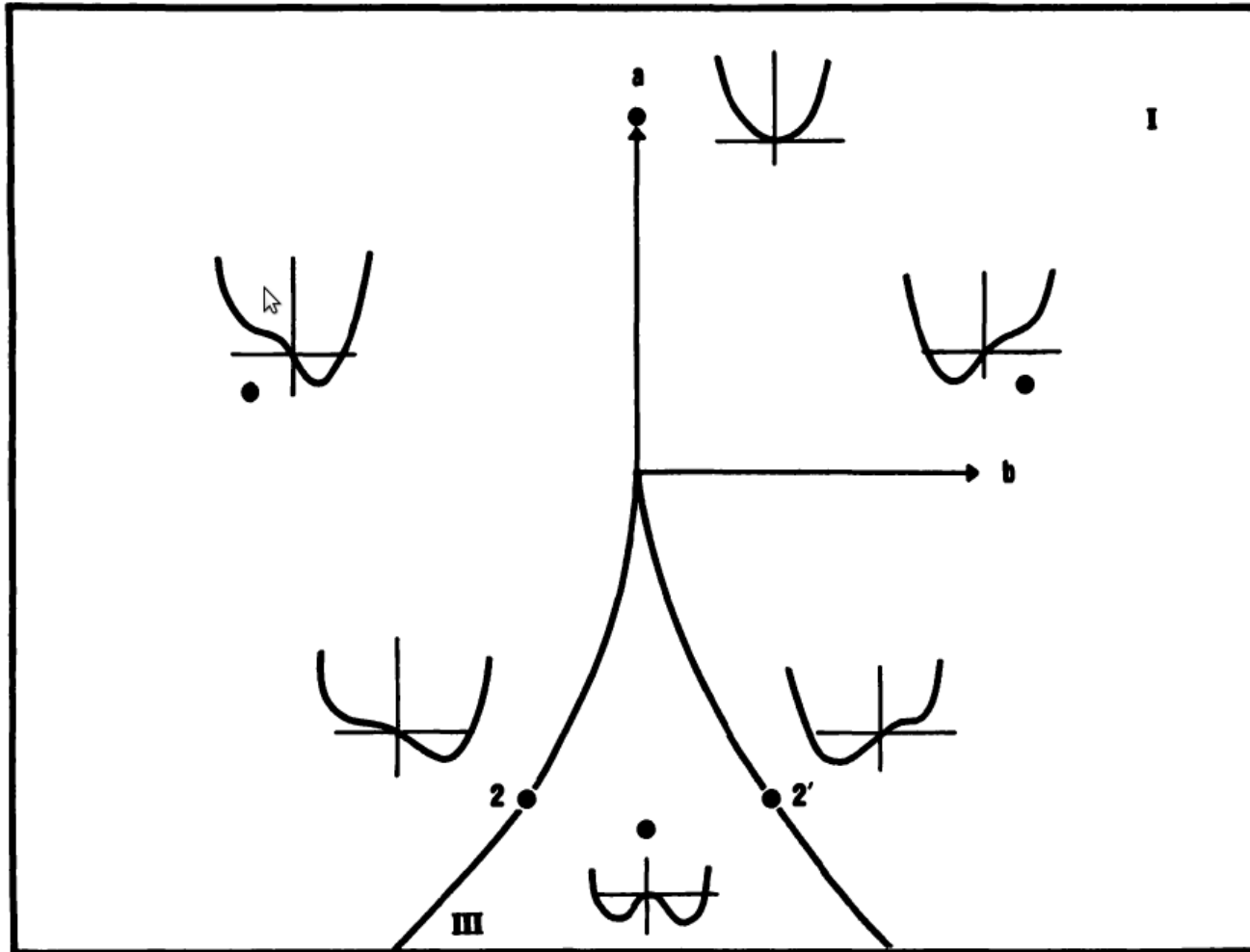


Figure 5.4 The separatrix of the cusp catastrophe, defined by $dF/dx = 0$, $d^2F/dx^2 = 0$, divides the control parameter space \mathbb{R}^2 into two open regions representing functions with one critical point

Catástrofe de umbílica elíptica

La forma general de la catástrofe es

$$V(x, a) = V_{abc}(x, y) = x^3 - 3xy^2 + a(x^2 + y^2) + bx + cy$$

La variedad catástrofe es

$$\partial V_{abc}(x, y) / \partial x = 3x^2 - 3y^2 + 2ax + b = 0$$

$$\partial V_{abc}(x, y) / \partial y = -6xy + 2ay + c = 0$$

Catástrofe de umbílica elíptica

La forma general de la catástrofe es

$$V(x, a) = V_{abc}(x, y) = x^3 - 3xy^2 + a(x^2 + y^2) + bx + cy$$

La variedad catástrofe es

$$\partial V_{abc}(x, y) / \partial x = 3x^2 - 3y^2 + 2ax + b = 0$$

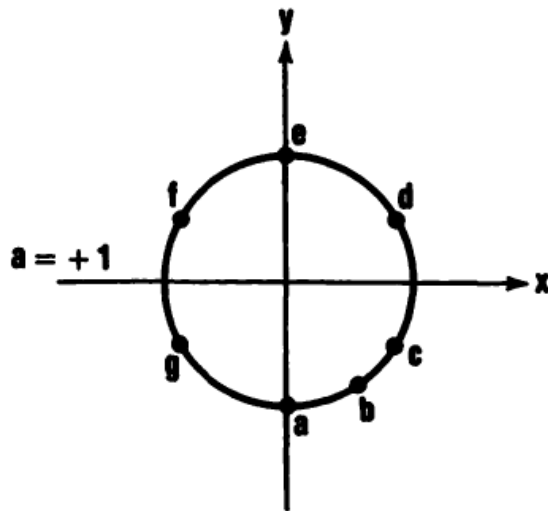
$$\partial V_{abc}(x, y) / \partial y = -6xy + 2ay + c = 0$$

Para obtener las separatrices en el espacio de control:

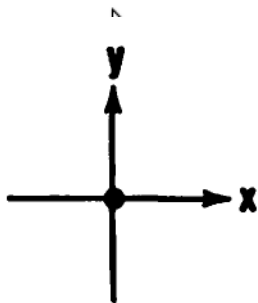
1. Se toma en cuenta a las singularidades del Hessiano de V_{abc} .
2. Se asignan valores específicos a los parámetros a, b, c .

Gráficamente

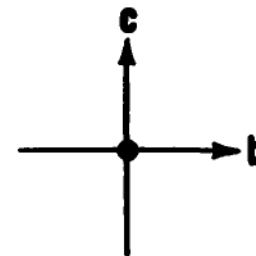
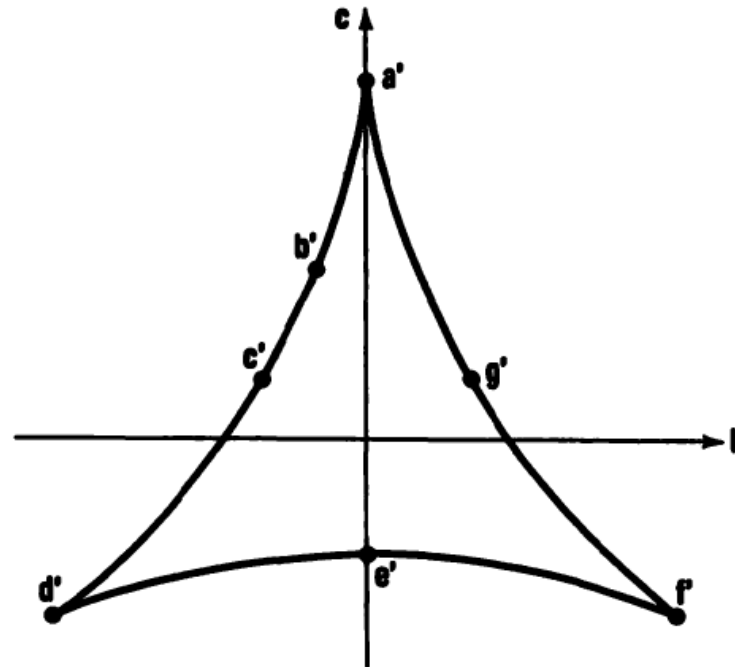
**CIRCULAR BAD SET IN
 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$**



$a = 0$



**CROSS SECTION OF BIFURCATION
SET IN $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^3$**



continuación . . .

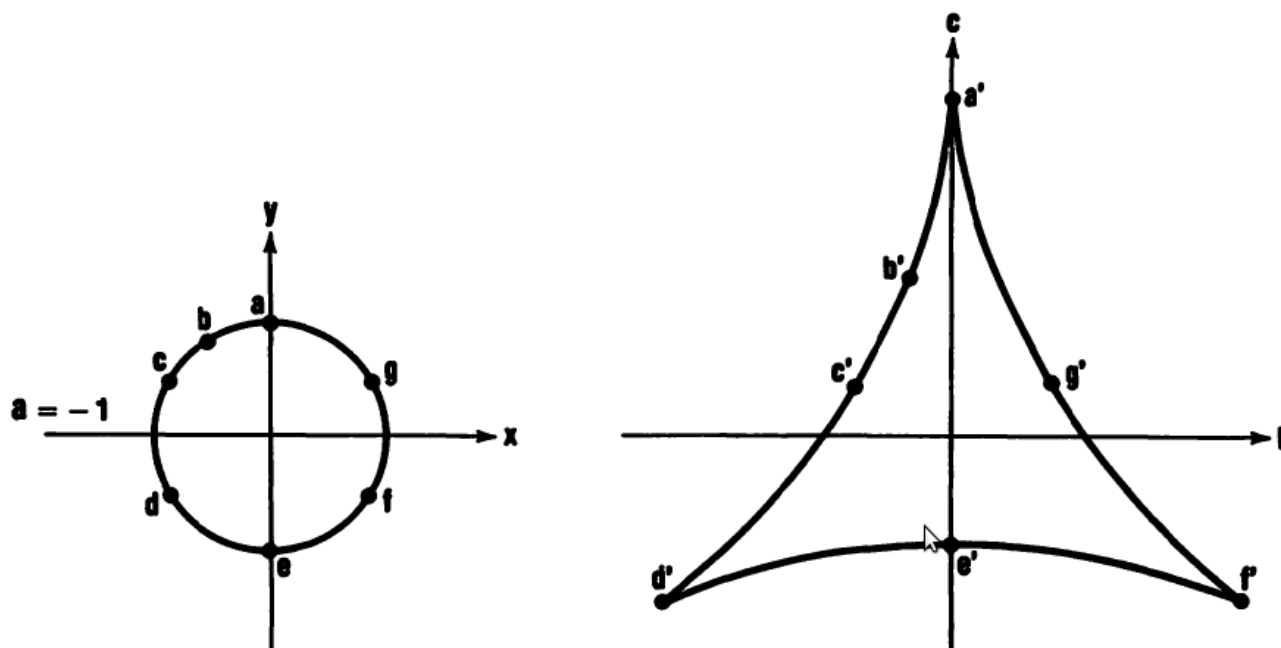


Figure 5.16 The relationship between the circular “bad set” and the separatrix of D_{-4} in \mathbb{R}^3 is shown for $a = +1$; $a = 0$; and $a = -1$.

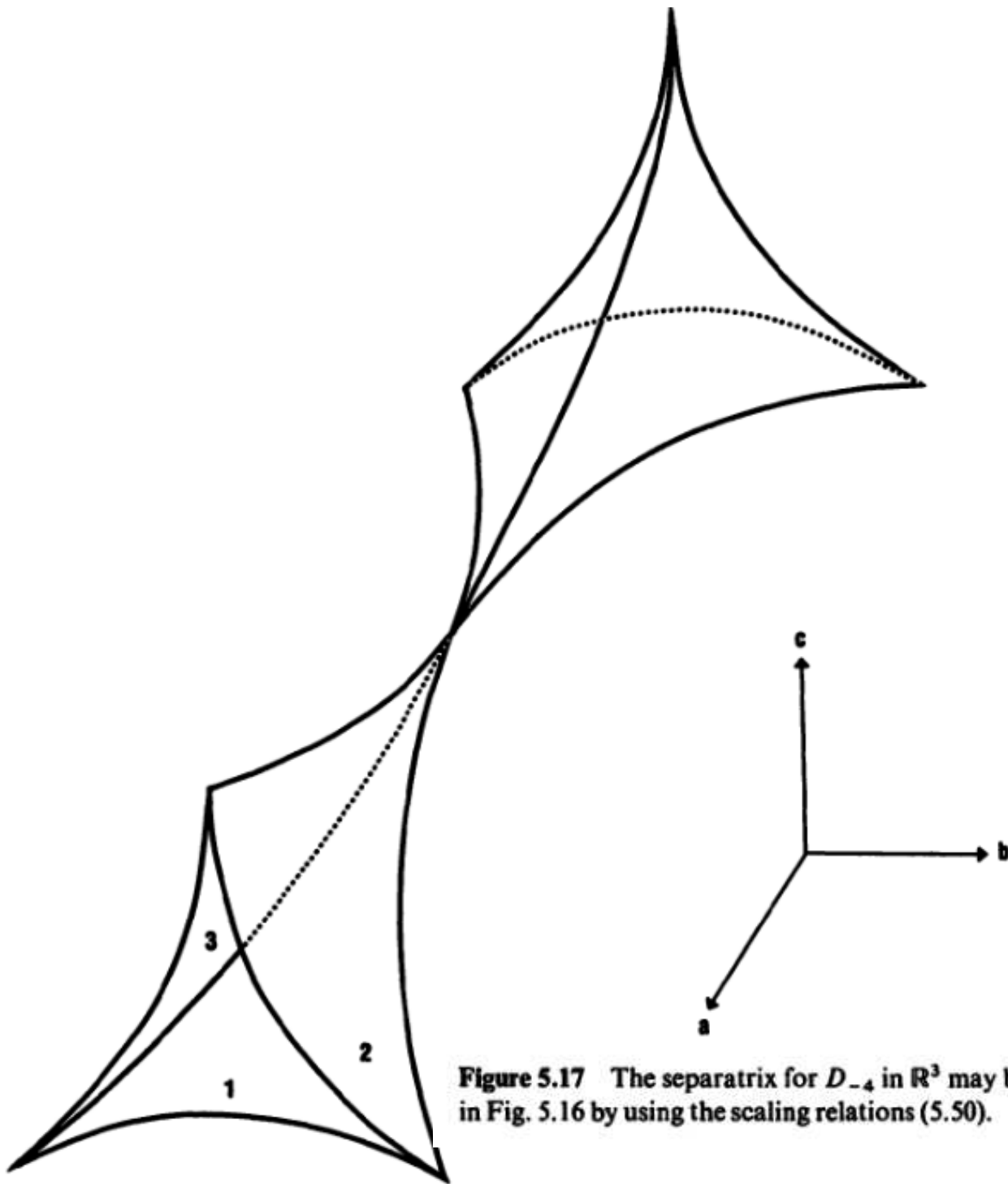


Figure 5.17 The separatrix for D_{-4} in \mathbb{R}^3 may be constructed from the three cross sections shown in Fig. 5.16 by using the scaling relations (5.50).