Apuntes de la Cátedra:

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

TEMA: VECTORES EN R^2 Y R^3

VECTORES EN R^2 Y R^3

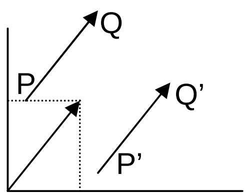
Contenidos:

Segmentos orientados y vectores. Suma. Propiedades. Distancia entre vectores. Vector unitario. Vectores canónicos Producto por un escalar. Cosenos directores. Producto escalar. Propiedades y aplicaciones. Proyecciones ortogonales. Producto vectorial. propiedades y aplicaciones. Producto mixto. Interpretación geométrica del producto vectorial y producto mixto. Ecuación de la recta en el espacio. Formas vectorial, paramétrica y simétrica. Ecuación del plano en el espacio. Intersecciones.

Vectores en el Plano

Hay una concepción geométrica del significado de un vector y una concepción algebraica, ambas compatibles.

Segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta con origen en P y extremo en Q. Notar que $PQ \neq QP$.



Las propiedades que caracterizan de un segmento dirigido son su magnitud o módulo, su dirección y su sentido. No obstante dos segmentos que sean coincidentes en estas características son distintos si no son coincidentes en el origen

Dos segmentos dirigidos son equivalentes si y sólo si tienen igual módulo, dirección y sentido.

$$\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{P'Q'}$$

Se puede considerar que existen en el plano infinitos vectores equivalentes a un segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$. Denominaremos vector $\overrightarrow{PQ}$, o vector **v** a todo elemento de ese conjunto.

Los dos segmentos representados son representantes del vector **v.** [1]

v se representa trasladando $\overrightarrow{PQ}$ al origen de coordenadas de R^2

En estas condiciones **v** admite una expresión como par ordenado en donde el par ordenado indica las coordenadas de su extremo **v** = (a,b).
a y b se denominan también componentes del vector **v**. Este concepto es más utilizado desde el punto de vista algebraico.

El módulo de **v** es un número real que representa su longitud
$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (por consecuencia directa de Pitágoras)

Ejercicio:

Demuestre que:
$|\mathbf{v}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \vec{0}$

---

[1] La notación más usual para vectores en R^2 y R^3 es la forma $\vec{v}$; pero para simplificar el tipeo, serán indicados en negrita minúscula: **v**

La dirección de v define un ángulo θ entre v y la dirección del eje horizontal x (llamado también eje de las absisas) en su sentido positivo. Dos vectores tienen igual dirección si y sólo si sus ángulos respectivos con dicho eje son iguales. En tal caso se dice que son paralelos.

El vector nulo no tiene dirección ni sentido.

Si **v** es no nulo y $v1 = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$

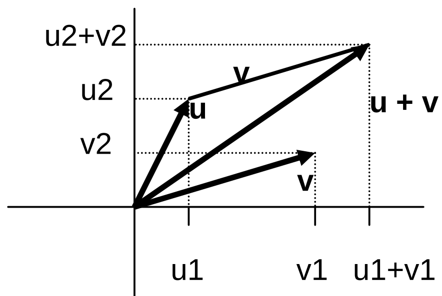
Si v es no nulo y $v1 \neq 0 \Rightarrow \theta = \text{arc tag}(b/a)$

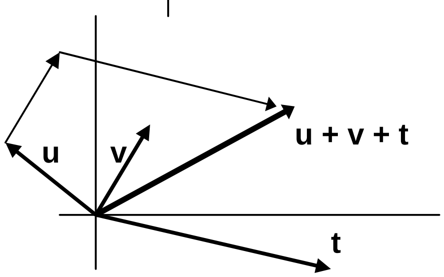
El sentido es comparable entre vectores paralelos:

Dos vectores paralelos u = (u1,u2) y v = (v1,v2) tienen igual sentido si con un origen común generan la misma semirrecta. O bien desde un punto de vista algebraico y en caso de componentes no nulas, si u1/v1 >0 y u2/v2>0. Si los cocientes son negativos, sus sentidos son opuestos. (además, al ser // resulta u1/v1 = u2/v2)

Suma de vectores

u + **v** = (u1,u2) + (v1, v2) = ((u1+v1),(u2+v2))



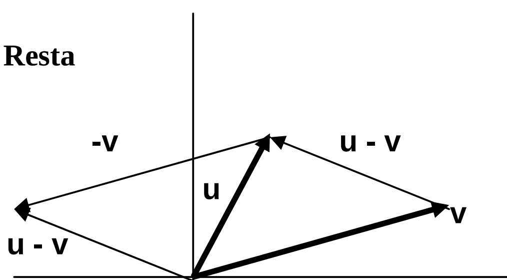


Gráficamente, se obtiene **u** + **v** trasladando el origen de **v** al extremo de **u**. El vector suma, cuyas componentes son (u1+v1, u2+v2) tiene por origen el origen de **u** y por extremo, el extremo de **v**.

Desde otro punto de vista, la suma **u** + **v** está dada por la diagonal del paralelogramo que forman **u** y **v** con sus pares paralelos, cuyo origen es el origen común.

El primero de los criterios de suma gráfica puede extenderse a la suma de más de dos vectores

Resta



Restar dos vectores es sumar al primero el opuesto del segundo: **u – v = u + (-v)**

Gráficamente, **u - v** es equivalente al segmento orientado cuyo origen es el extremo de **v** y su extremo es el extremo de **u**

Se aprecia que **v** + (**u-v**) = **u**

Distancia entre dos vectores

La distancia entre **u** y **v** debe interpretarse como la distancia entre sus extremos, cuando están aplicados en un mismo origen. Tendremos en cuenta que podemos representar los elementos de R^2 como vectores o como puntos del plano.

En el gráfico anterior se aprecia que la distancia entre los extremos de **u** y de **v** es $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$.

Esto resulta práctico para determinar distancias entre puntos del plano, y el concepto puede extenderse a R^3.

Ejemplo:

Sean **p1** = (-2, 7) y **p2** = (-6, 4)

Determinar la distancia entre ambos puntos.

Basta considerar a los puntos como vectores:

$$d_{\mathbf{p1p2}} = |\mathbf{p1}-\mathbf{p2}| = |4, 3| = 5$$

Producto de un vector por un escalar

Sea $\alpha \in R$ y $v \in R^2$: $\alpha v = (\alpha v1, \alpha v2)$

$$|\alpha \mathbf{v}| = |\alpha|\,|\mathbf{v}| \quad \text{ya que}$$

$$|\alpha \mathbf{v}| = +\sqrt{(\alpha v1)^2 + (\alpha v2)^2} = +\sqrt{\alpha^2 (v1^2 + v2^2)} = |\alpha|\,|\mathbf{v}|$$

La dirección de $\alpha\mathbf{v}$ no varía si $\alpha \neq 0$:

Sean θ y θ' los ángulos que definen las direcciones de **v** y $\alpha\mathbf{v}$ respectivamente

a) Si $v1 = 0$ y $v2 \neq 0 \Rightarrow \alpha v1 = 0$ y $\alpha v2 \neq 0 \Rightarrow \theta = \theta' = \pi/2$

b) $v1 = v2 = 0$ es el vector nulo y αv también

c) $v1 \neq 0 \Rightarrow$

$\text{tag } \theta = \dfrac{v2}{v1}$ $\quad \text{Tag } \theta' = \dfrac{\alpha v2}{\alpha v1} = \dfrac{v2}{v1} \Rightarrow \theta = \theta' \Rightarrow$ las direcciones son iguales

El sentido se invierte si $\alpha < 0$, ya que en ese caso $|\alpha|\mathbf{v}$ tiene igual sentido que v y $\alpha\mathbf{v}$ **y** $|\alpha|\mathbf{v}$ son opuestos entre sí

Vector unitario de igual dirección y sentido a un vector dado

Sea **v** = (v1,v2) no nulo

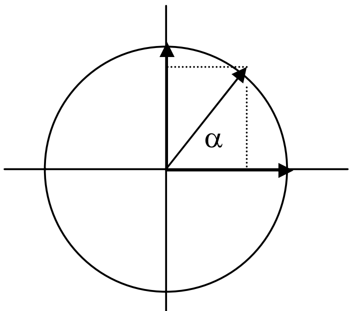
$\mathbf{v}' = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es el vector unitario de igual dirección y sentido que **v**

En efecto: $|\mathbf{v}'| = \sqrt{(v1/|v|)^2 + (v2/|v|)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{v1^2 + v2^2}{v1^2 + v2^2}\right)} = 1$

Además **v'** es el producto de **v** por un escalar por lo que su dirección no cambia, y tampoco su sentido ya que el módulo nunca es negativo

Vector unitario definido por el ángulo α formado con el eje positivo de las absisas.

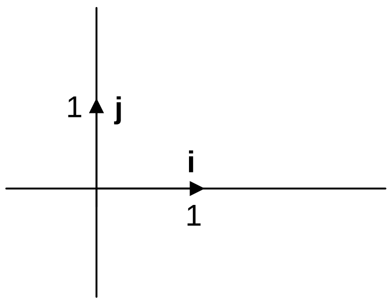
Sea $0 \leq \alpha < 2\pi$



En la circunferencia de radio unitario están inscriptos todos los vectores unitarios de R^2 (Su distancia al origen es 1)
Dado un α que defina dirección y sentido, el vector unitario **v´** correspondiente es:

$$\mathbf{v'} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}$$

Vectores canónicos



Son vectores unitarios paralelos a los ejes coordenados, de sentido según el sentido positivo de dichos ejes.

$\mathbf{i} = (1, 0)$

$\mathbf{j} = (0, 1)$

Producto Escalar

El producto escalar de dos vectores (producto punto) es el número Real determinado por la suma de los productos de las coordenadas homólogas de dichos vectores.

$\bullet\ = \quad f : R^2 \times R^2 \rightarrow R$

Sean $\mathbf{u} = (u1, u2)$; $\mathbf{v} = (v1, v2)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u1v1 + u2v2$

Propiedades del Producto escalar

$$\boxed{\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{t}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{t}}$$

$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{t}) = (u1, u2) \bullet (v1+t1, v2+t2) = u1((v1+t1) + u2(v2+t2)) =$

$= ((u1v1+u1t1) + (u2v2 + u2t2)) = (u1v1+ u2v2) + (u1t1+ u2t2) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{t}$

$$\boxed{\mathbf{u} \bullet k\mathbf{v} = k\ (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})}$$

(Demostración a cargo del alumno)

$$\boxed{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} \geq 0}$$

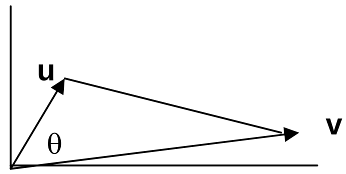
$\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = u1u1 + u2u2 = |\mathbf{u}|^2 \geq 0$

$$\boxed{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0}$$

(Demostración a cargo del alumno)

Ángulo entre dos vectores

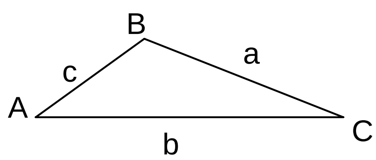
Se define como el menor ángulo positivo determinado por ambos al estar aplicados en un origen común.



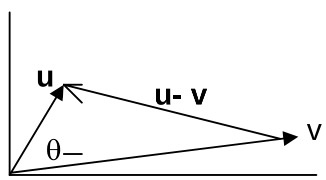
$0 \leq \theta \leq \pi$

Demostraremos que cos θ = **| u |** |**v** | cos θ

a) **u** y **v** No paralelos
Ambos son lados de un triángulo, en el que se puede aplicar el teorema de los cosenos:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \widehat{bc}$



$|\mathbf{u\text{-}v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \theta$

$|\mathbf{u\text{-}v}|^2 = ((\mathbf{u} - \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} - \mathbf{v})) = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}) - 2\,(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$
$= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$

Resultando:

$$\boxed{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta}$$

y

$$\boxed{\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}}$$

b) **u** y **v** paralelos. En tal caso no definen un triángulo, y es **v** = k.**u**
$(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = (u1,u2 \bullet k\,u1, k\,u2) = k\,u1^2 + k\,u2^2$ (el signo depende de k)

$|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = \sqrt{u1^2 + u2^2}\ \sqrt{ku1^2 + ku2^2} = k\,(u1^2 + u2^2)$ (siempre > 0)

Vemos que $(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = \pm |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$, dependiendo el signo del signo de k. (positivo si tienen igual sentido; negativo si tienen sentido opuesto), lo que puede generalizarse como:
$(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \theta$, llegándose a idéntica conclusión que en el caso anterior.

Vectores ortogonales

Definición: $\boxed{\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0}$

Se aprecia que a partir de la definición el vector nulo es ortogonal a cualquier otro vector, lo cual es conveniente para temas posteriores.

Cuando los vectores son no nulos la definición concuerda con el concepto clásico de ortogonalidad, asociado a que el ángulo comprendido entre ambos sea recto.

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta = 0$$

y

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \Rightarrow |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta = 0 \Rightarrow \text{algún vector es nulo}$$

ó

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$$

Proyecciones ortogonales

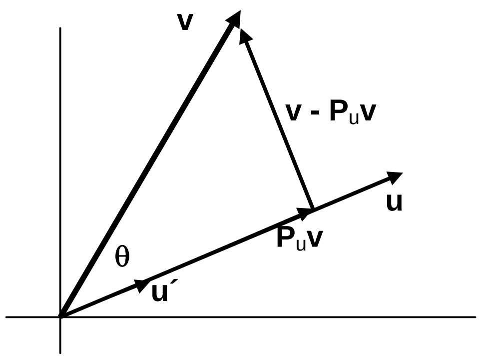
Las proyecciones ortogonales de $\mathbf{v} = (v1,v2)$ sobre los ejes cartesianos son:

$$P_x\mathbf{v} = v1\,\mathbf{i}\ ; \quad P_y\mathbf{v} = \mathbf{v}2\,\mathbf{j}$$

Se verifica que:

$$\mathbf{v} = P_x\mathbf{v} + P_y\mathbf{v} \qquad \mathbf{y} \qquad P_x\mathbf{v} \perp P_y\mathbf{v}$$

Es posible abordar el problema en forma más general y determinar las proyecciones sobre una dirección cualquiera, no necesariamente paralela a los ejes.



$P_u\mathbf{v}$ depende de **v** y de la dirección de **u,** pero no de la magnitud de **u**. (interesa la recta que contiene a **u**). Por ello es factible considerar un vector unitario **u´**, según la dirección y sentido de **u**.

$\mathbf{u´} = \mathbf{u} / |\mathbf{u}|$

Por relación trigonométrica:

$$\cos\theta = \frac{|P_u\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

Por def de ángulo entre dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{v} \bullet \mathbf{u´})}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{u´}|} = \frac{(\mathbf{v} \bullet \mathbf{u´})}{|\mathbf{v}|}$$

$$\Rightarrow |P_u\mathbf{v}| = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u´}) \qquad (|\mathbf{u´}| = 1)$$

$$P_u\mathbf{v} = |P_u\mathbf{v}|\ \mathbf{u´} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P_u\mathbf{v} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u´})\mathbf{u´}}$$

Probar que en si en vez de considerar un **u´** unitario se opera directamente con **u,** es válida la siguiente expresión:

$$\boxed{P_u\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{v} \bullet \mathbf{u})\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}}$$

Ejemplo:

Determinar la proyección de **v** = (-2, 6) sobre la recta que pasa por el origen cuya ecuación es y=2x

Un vector que pertenece a la recta es de la forma:

u= (u1, 2u1) Tomando u1 = 1 resulta **u** = (1, 2) $\Rightarrow$ | **u** | = √5

$\mathbf{u}' = \dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$\mathbf{P_u v} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}')\,\mathbf{u}' = 1/5[\,(-2, 6) \bullet (\sqrt{5}, 2\sqrt{5})\,]\ \mathbf{u}' = \dfrac{-2\sqrt{5} + 12\sqrt{5}}{5} =$

$= 2\sqrt{5}\ \mathbf{u}' = (2, 4)$

También es posible plantear directamente:

$\mathbf{P_u v} = \dfrac{(\mathbf{v} \bullet \mathbf{u})}{|\,\mathbf{u}\,|^2}\,\mathbf{u} = \dfrac{[(-2, 6) \bullet (1, 2)]}{5}\,(1, 2) = 2\ (1, 2) = (2, 4)$

Vectores en R³

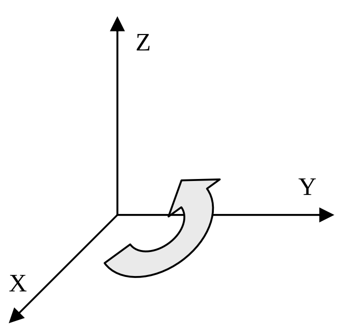
Similares conceptos a los planteados en R2 pueden aplicarse a R3.

Vector de R3 es toda terna ordenada de N^os^ reales. **v** = (v1,v2,v3)

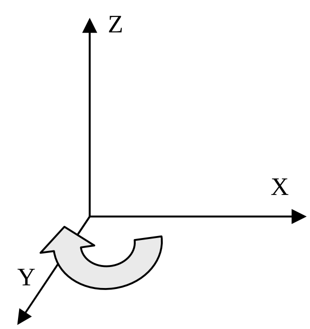
Para su representación se utilizan tres ejes ortogonales llamados ejes cartesianos X,Y,Z

Se pueden plantear dos esquemas de representación, denominados “mano derecha” y mano izquierda. Generalmente se usa el de la mano derecha

Esquema de la mano derecha



Esquema de la mano izquierda



En el primero, el índice de la mano derecha representa al eje X, el pulgar al eje Z y el anular al eje Y (en posición de la mano propia enfrentada al observador). El sentido de rotación X $\rightarrow$ Y $\rightarrow$ Z es anti-horario, como el empleado para medir ángulos

En el segundo, se considera el mismo esquema, pero con la mano izquierda. El sentido de rotación X $\rightarrow$ Y $\rightarrow$ Z es horario, o sea contrario al utilizado para medir ángulos

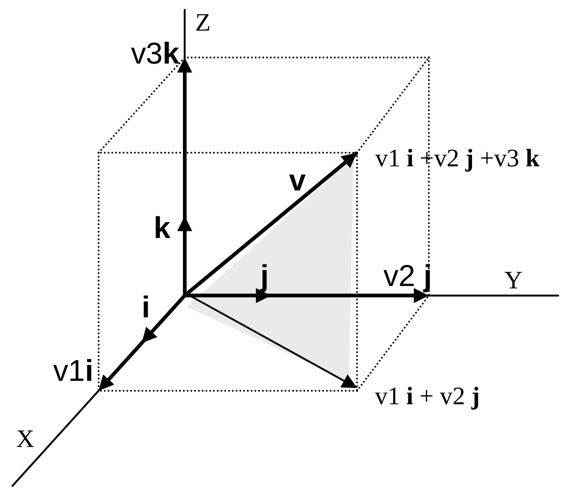
Vectores canónicos en R^3

Los vectores canónicos en R^3 son :
i = (1,0,0)
j = (0,1,0)
k= (0,0,1)

Puede verificarse que los mismos son ortogonales entre sí, comprobando que el producto escalar es nulo para cualquier par

Todo vector de R3 se puede escribir como suma de los vectores canónicos multiplicados por un escalar. Cada término es la proyección del vector sobre el eje coordenado correspondiente**.** Se dice que v es *combinación lineal* de los vectores canónicos, concepto que se estudiará en detalle en la unidad siguiente.

v = v1 **i** + v2 **j** + v3 **k**



Igual que en R^2, los vectores en R^3 quedan definidos por su módulo, su dirección y sentido.

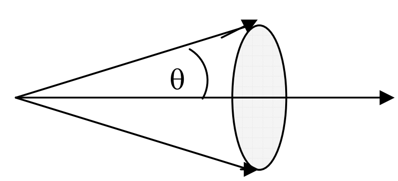
Módulo en R^3

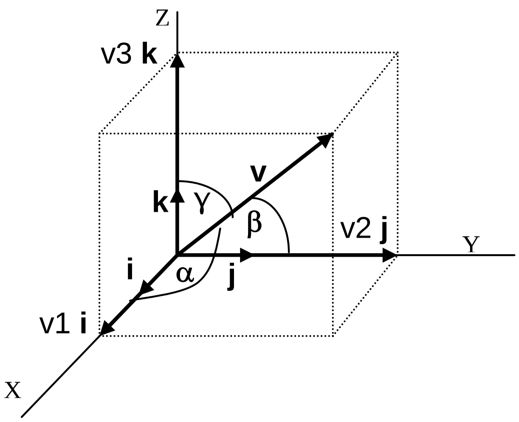
$$| \mathbf{v} | = \sqrt{v1^2 + v2^2 + v3^2}$$

Representa la longitud del segmento orientado en R^3, lo que puede comprobarse determinando |v1 **i** + v2 **j** | (componente según el plano XY) y luego aplicando Pitágoras en el triángulo que forman esta componente, v3**k** y **v** (área sombreada fig. anterior).

Dirección y sentido de un vector

No es posible determinar la dirección en el espacio a partir del ángulo con un solo eje, ya que hay infinitos vectores que determinan el mismo ángulo θ (contenidos en el cono según la fig.)





La dirección y el sentido de **v** quedan unívocamente determinados por los ángulos que forma **v** con cada uno de los ejes de coordenadas.

Los cosenos de cada uno de dichos ángulos se denominan *cosenos directores* del vector.

$$\cos\alpha = \frac{v1}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\beta = \frac{v2}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\gamma = \frac{v3}{|\mathbf{v}|}$$

$0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 2\pi$

Propiedad: La suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector es 1

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{v1^2 + v2^2 + v3^2}{|\mathbf{v}|^2} = 1$$

Producto escalar en R³

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u1v1 + u2v2 + u3v3$$

Todas las propiedades expresadas en R² son extensivas a R³, incluidos los conceptos de ángulos y distancia entre vectores, ortogonalidad, y proyecciones.

Producto vectorial de dos vectores (o Producto Cruz)

$\times : R^3 \times R^3 \rightarrow R^3$

Es una operación definida sólo en R³ de la cual resulta un tercer vector.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u1 & u2 & u3 \\ v1 & v2 & v3 \end{vmatrix} = (u2v3-u3v2)\mathbf{i} + (u3v1-u1v3)\mathbf{j} + (u1v2-u2v1)\mathbf{k}$$

Propiedades

Pueden justificarse a partir de las propiedades de los determinantes.

I. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ (Conmutación de filas)
II. $(\alpha\, \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (Producto de una fila por un escalar)
III. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$ (descomposición de una fila en suma de otras dos)
IV. Sean **u** y **v** no nulos: $\mathbf{u} \,//\, \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$ (filas iguales o proporcionales)

Módulo del producto vectorial

Sea θ el ángulo entre **u** y **v** : $\Rightarrow$ $\boxed{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\mathrm{sen}\theta}$

$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})^2$ Relación a demostrar por el alumno calculando:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |(u2v3-u3v2)\mathbf{i} + (u3v1-u1v3)\mathbf{j} + (u1v2-u2v1)\mathbf{k}|^2$$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \cos^2\theta = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \mathrm{sen}^2\theta \Rightarrow |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\mathrm{sen}\theta$ (los módulos son no negativos)

Producto mixto o triple producto escalar

Es factible plantear el producto escalar entre un vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y un tercer vector **w:**
$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$ esta operación se denomina producto mixto

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} =$ w1(u2v3-u3v2) +w2 (u3v1-u1v3) + w3(u1v2-u2v1)

Esto es el desarrollo por la tercera fila del determinante:

$$\begin{vmatrix} u1 & u2 & u3 \\ v1 & v2 & v3 \\ w1 & w2 & w3 \end{vmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$$

Es fácil comprobar que :
$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (El 2° término es el desarrollo por la 1ª fila del mismo determinante)

Otogonalidad de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ respecto de **u** y de **v**
$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$, lo que es equivalente a escribir:
$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = 0$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = \begin{vmatrix} u1 & u2 & u3 \\ v1 & v2 & v3 \\ u1 & u2 & u3 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$ (dos filas iguales)

Similar situación se da en $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Concluyendo, el producto vectorial a asigna a **u** y a **v** un vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ normal a ambos, o sea $\perp$ al plano determinado por **u** y **v**. Es ésta una de las propiedades de mayor aplicación del producto vectorial, ya que dados dos vectores, permite encontrar un tercero normal al plano que ellos determinan.

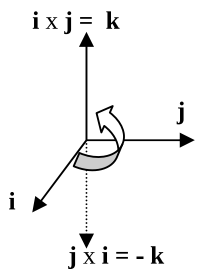
Gráfica del producto vectorial

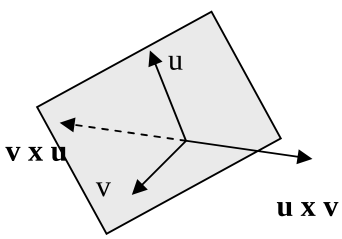
Analizaremos el producto vectorial entre los vectores canónicos, operando en sentido anti-horario:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = j$$

Los mismos productos conmutados dan los elementos opuestos

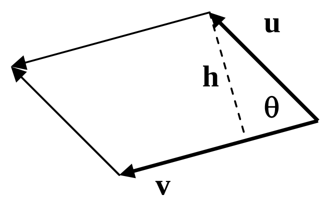




En **i** x **j** el giro i→j es anti-horario ⇒ **i** x **j** tiene sentido según **k** , respondiendo al esquema mano derecha. En j x i el giro es horario ⇒ i resulta contrario a **k** . Lo mismo sucede con los demás productos intercanónicos.
Extendemos esto al producto entre vectores cualesquiera: si en **u** x **v** el giro de **u** hacia **v** es anti-horario, **u** x **v**, normal al plano de **u** y **v**, mantiene el esquema antihorario y se representa saliendo del plano como un tirabuzón que se desenrosca. Esto se interpreta también colocando la mano derecha abierta paralela al primer vector, con los dedos apuntando en el sentido del vector, de modo que se pueda cerrar hacia el segundo. La posición del pulgar indica el sentido del producto vectorial. En la figura, para llevar **v** hacia **u** se debe colocar el pulgar hacia abajo.

Aplicación geométrica del Producto vectorial y del producto mixto.

a) El módulo del producto vectorial **u** x **v** es igual al área S del paralelogramo definido por **u** y por **v**

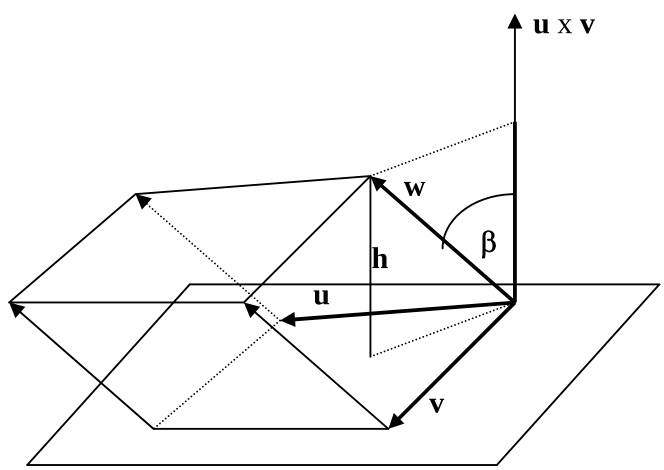


$S = h\,|\mathbf{v}|$

$h = |\mathbf{u}|\,\mathrm{sen}\theta \;\Rightarrow$

$S = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\mathrm{sen}\theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$

b) El producto mixto entre tres vectores es igual al volumen del paralelepípedo que éstos determinan.



$V = S_{base} \times h$
$V = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \times h$

$h = |\mathbf{w}|\cos\beta$

$V = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\cos\beta$
$V = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$

Vectores coplanares

Tres vectores son coplanares ⇔ su producto mixto es cero

Los tres pertenecen al mismo plano, entonces el volumen que encierran es nulo.

$$\begin{vmatrix} u1 & u2 & u3 \\ v1 & v2 & v3 \\ w1 & w2 & w3 \end{vmatrix} = 0$$

indica que los vectores fila están en el mismo plano. Todas las matrices de orden 3x3 pueden considerarse como conjuntos de 3 vectores fila, que son coplanares si su determinante es nulo

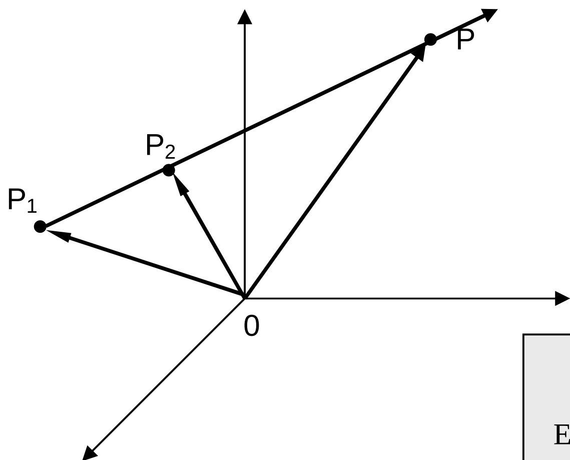
Ecuación de la recta en el espacio

Una recta en el espacio queda definida por dos puntos conocidos, o bien por un punto y su dirección.
Sean los puntos de R^3 $P_1 = (x1, y1, z1)$ y $P_2 = (x2, y2, z2)$

El vector **v** representante del segmento orientado $\overrightarrow{P_1P_2}$ tiene como componentes
v = $(x2-x1)\mathbf{i} + (y2-y1)\mathbf{j} + (z2-z1)\mathbf{k}$

v es paralelo a la recta definida por P_1 y P_2.

Consideramos un punto genérico de la recta P= (x, y ,z)



$$\overrightarrow{P_1P} = t\ \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0P_1} + \overrightarrow{P_1P}$$

$$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0P_1} + t\ \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0P_1} + t\ \mathbf{V}$$

Ecuación vectorial de la recta en el espacio

Desarrollando las componentes de la ecuación:

$$x\,\mathbf{i} + i\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = x1\,\mathbf{i} + y1\,\mathbf{j} + z1\,\mathbf{k} + t(x2-x1)\,\mathbf{i} + t\,(y2-y1)\mathbf{j} + t\,(z2-z1)\,\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x1 + t\,(x2 - x1) \\ y &= y1 + t\,(y2 - y1) \\ z &= z1 + t\,(z2 - z1) \end{aligned}$$

Ecuación paramétrica

$$\Rightarrow \quad \frac{x - x1}{(x2 - x1)} = t \qquad \frac{y - y1}{(y2 - y1)} = t \qquad \frac{z - z1}{(z2 - z1)} = t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x - x1}{a} = \frac{y - y1}{b} = \frac{z - z1}{c}$$

Ecuación simétrica

a, b ,c son determinados a partir de las diferencias de las coordenadas de P2 Y P1, puntos conocidos.

Si la referencia es un solo punto (P1) y la dirección de un vector **v** paralelo a la recta, a, b y c están dados por las componentes de **v**.

La ecuación simétrica requiere que a, b y c sean no nulos.

Supongamos el caso en que c=0:

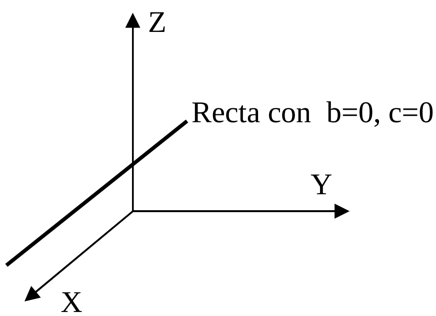
La paramétrica correspondiente se reduce a z= z1 (para cualquier t) , es decir en la recta los valores de z no varían $\Rightarrow$ $\in$ a un plano // al XY, y z1 es la distancia de la recta al plano XY.

La ecuación simétrica tiene la forma

$$\underbrace{\frac{x - x1}{a} = \frac{y - y1}{b}} \quad ; \quad z = z1$$

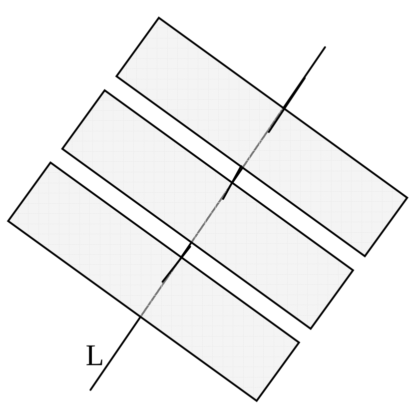
Recta en un plano // al XY

Si dos números directores son nulos (Ej. b y c) $\Rightarrow$ la recta no varía en y ni en z $\Rightarrow$ es paralela al eje restante (X para el ejemplo).



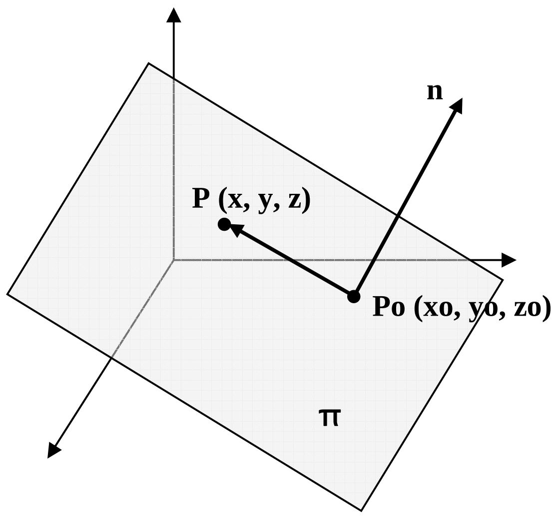
Ecuación del Plano en el Espacio

Una recta L es $\perp$ a un plano π $\Leftrightarrow$ todo vector del plano π es $\perp$ a todo vector perteneciente a la recta L. Dada una recta queda fija la inclinación de todo plano $\perp$ a ella. Sin embargo hay infinitos planos ortogonales.



Si además de dar una dirección normal, fijamos un punto en el espacio por donde debe pasar el plano, establecemos condición de unicidad.

Generalmente se fija la dirección normal al plano mediante un vector.



Sea Po=(xo,yo,zo) un punto conocido perteneciente al plano y **n** un vector dado, normal; **n**= (a, b, c)
Sea P=(x,y,z) un punto genérico del plano.
El vector $\overrightarrow{PoP} \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{PoP} \bullet \mathbf{n} = 0$
$\Rightarrow$ a(x-xo) + b(y-yo) + c(z-zo) = 0

$ax+by+cz = \underbrace{axo+byo+czo}_{d}$

d se obtiene a partir de términos conocidos

$$ax+by+cz = d$$
Ecuación cartesiana del plano

El término independiente es d= $\overrightarrow{OPo} \bullet \mathbf{n}$ Si el plano pasa por el origen, $\overrightarrow{OPo} \in$ al plano, resultando normal a **n** $\Rightarrow$ d = 0

Ecuación del Plano que pasa por tres puntos

Tres puntos definen dos vectores pertenecientes al plano. A partir de los dos vectores se puede obtener por producto vectorial el vector **n**. El problema se reduce al caso anterior, usando **n** y uno de los tres puntos conocidos.

Planos paralelos a los planos coordenados ejes en R^3:

Sea el plano coordenado XY, un punto del plano es el origen (0,0,0) y un vector normal es k = (0, 0, 1).
La ecuación cartesiana resultante es: 0 (x – 0) + 0 (y – 0) + 1 (z – 0) = 0
$\Rightarrow$ z = 0 es el plano XY.
De la misma forma se ve que z = k es un plano // al XY , que pasa por el punto (0, 0, k)

Intersecciones

Intersección entre planos

El problema de intersección de planos, fue estudiado en la unidad Sistemas de Ecuaciones Lineales, y como se ha visto consiste en encontrar el conjunto solución de un sistema con tres incógnitas.

Intersección entre una recta en el espacio y un plano

La intersección es única si la recta no es // al plano.

Si es paralela hay infinitas soluciones (toda la recta) si ésta $\in$ al plano y no solución si ésta es externa al plano.

El problema se reduce a plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

Sea el plano: $ax + by + cz = d$

y la recta: $\dfrac{x - x1}{p} = \dfrac{y - y1}{q} = \dfrac{z - z1}{r}$

La intersección es la solución del sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ \dfrac{x - x1}{p} = \dfrac{y - y1}{q} \\ \dfrac{x - x1}{p} = \dfrac{z - z1}{r} \end{cases}$$

BIBLIOGRAFÍA

GROSSMAN. Álgebra Lineal con Aplicaciones. Edit. Mc Graw Hill

LIPSCHUTZ. Álgebra Lineal. Edit. Mc. Graw Hill