Facultad de Química, UNAM

Fundamentos de Espectroscopía

Dra. Betsabeé Marel Monroy Peláez

Preguntas a responder:

- ¿Cuál es la diferencia entre el oscilador armónico simple y el oscilador amortiguado?
- ¿Cuál es la ecuación de movimiento del oscilador amortiguado?
- ¿Cuáles son los tres casos posibles de amortiguamiento?
- ¿Cómo es el comportamiento de la amplitud en el oscilador armónico amortiguado?
- ¿Cuál es la diferencia entre la frecuencia del oscilador armónico simple y el oscilador armónico amortiguado?

Oscilador Amortiguado
Ecuación de Movimiento

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Damped_spring.gif

- El **oscilador amortiguado** considera el efecto de fuerzas disipativas (fricción, viscosidad, etc):

$$R = -b \cdot v$$

donde *b* es el **coeficiente de amortiguamiento.**

- Si se añade el término correspondiente a la **fuerza retardadora** la ecuación de movimiento del oscilador amortiguado queda como :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

- La forma más general y simple de resolver esta ecuación es proponiendo como solución una función exponencial:

$$x(t) = A\exp(\alpha t)$$

- **La primera y segunda derivadas con respecto al tiempo son:**

$$\frac{dx}{dt} = \alpha A \exp(\alpha t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 A \exp(\alpha t)$$

- **Sustituyendo en la ecuación de movimiento se obtiene:**

$$\left(\alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \omega_0^2\right) \cdot A \exp(\alpha t) = 0$$

- **Como la función exponencial nunca es cero, se resuelve la ecuación cuadrática, cuyas raíces son:**

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

- **Dependiendo de los valores de β y ω_0 se tienen tres casos diferentes:**

I. $\beta < \omega_0 \rightarrow$ **Oscilador subamortiguado**

- **Las raíces en este caso son complejas por lo que:**

$$\alpha = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

- **Definimos una nueva frecuencia:**

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

- **Esto significa que la exponencial es compleja por lo que se puede escribir como:**

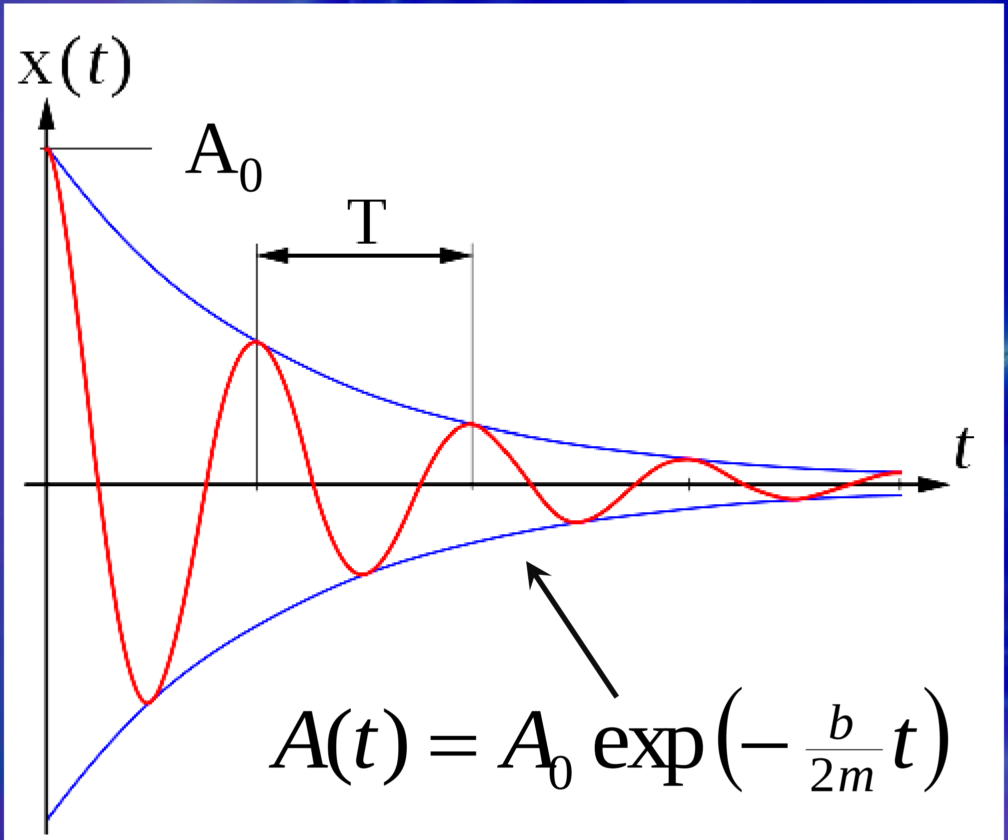
$$x(t) = A\exp\left(\left(-\beta \pm i\omega_1\right)t\right) = A\exp(-\beta t)\exp(\pm i\omega_1 t)$$

- **Utilizando la fórmula de Euler:** $\exp(i\omega_1 t) = \cos(\omega_1 t) + i\sin(\omega_1 t)$

- **Por lo tanto la solución general de la ecuación de movimiento es:**

$$x(t) = A_0 \exp\left(-\tfrac{b}{2m}t\right)\cos(\omega_1 t + \phi)$$

- La imagen muestra el comportamiento de un oscilador amortiguado:



$$A(t) = A_0 \exp\left(-\frac{b}{2m}t\right)$$

http://beltoforion.de/pendulum_revisited/Damped_oscillation_graph2.png

- Es importante notar que la frecuencia del oscilador amortiguado es menor que la frecuencia natural del oscilador armónico ω_0

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- La amplitud decae exponencialmente (envolvente).
- La energía instantánea se aproxima por:

$$E(t) = \frac{1}{2} k \cdot A_0^{\ 2} \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$$

II. $\beta = \omega_0$ → **Oscilador críticamente amortiguado**

- **El decaimiento es exponencial sin llegar a oscilar.**

$$x(t) = A\exp\left(-\tfrac{b}{2m}t\right)$$

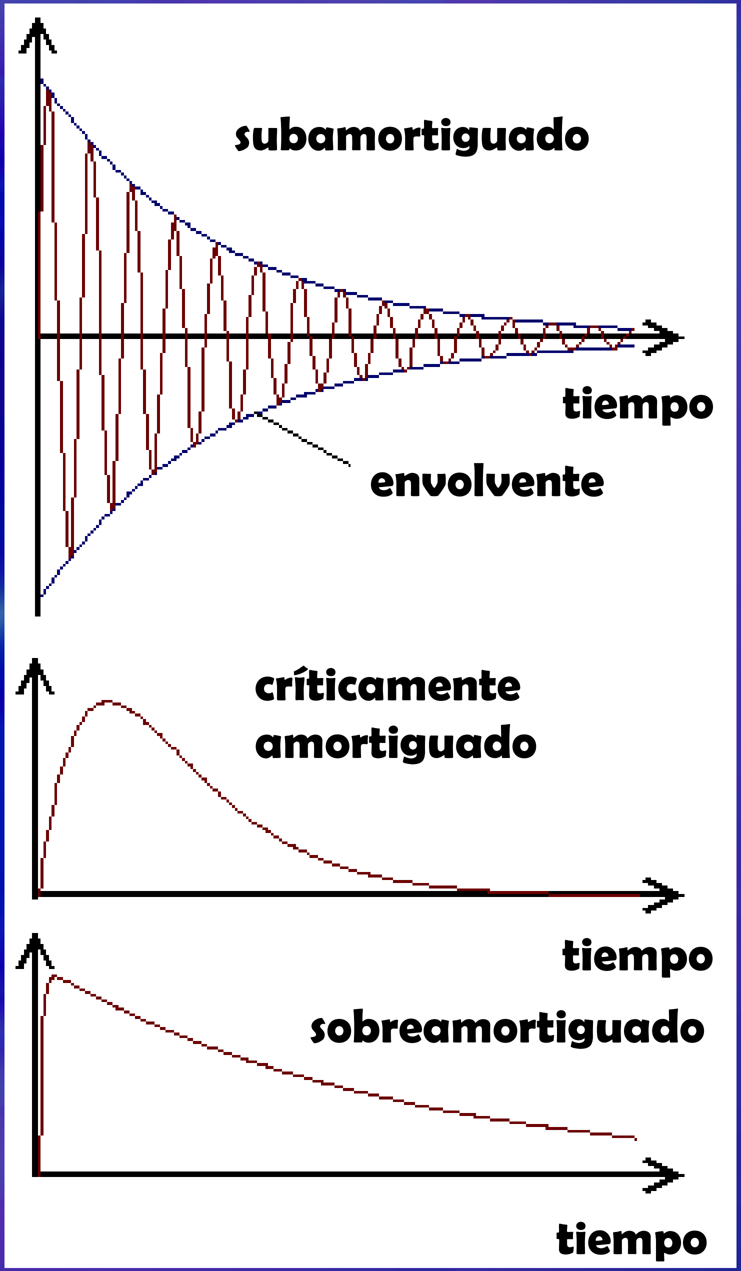
III. $\beta > \omega_0$ → **Oscilador sobreamortiguado**

- **Decaimiento sin llegar a oscilar.**
- **La "frecuencia" angular es ahora:**

$$\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

- **La solución a la ecuación de movimiento es:**

$$x(t) = A\exp\left(-\tfrac{b}{2m}t\right)\cosh(\omega_2 t + \phi)$$



http://www.hasdeu.bz.edu.ro/softuri/fizica/mariana/Mecanica/Pendul_1/hosc.gif

Ejercicios

1. En un oscilador amortiguado, una masa de 250 g está conectada a un resorte cuya constante de fuerza es de 85 N/m. El coeficiente de amortiguamiento causado por la fricción con el suelo es de 0.070kg/s. ¿En cuántos periodos de oscilación la energía mecánica habrá disminuido a la mitad?

2. Un oscilador armónico amortiguado consta de un resorte (k=12.6 N/m) y un bloque (m=1.91 kg) sobre el cual actúa una fuerza de amortiguamiento F=-b·v. Inicialmente, el bloque oscila con una amplitud de 26.2 cm. A causa del amortiguamiento, la amplitud disminuye a ¾ partes de este valor inicial después de cuatro ciclos completos.
   a) ¿Cuál es el valor de b?
   b) ¿Cuánta energía se ha "perdido" durante estos 4 ciclos?

Ejercicios

3. En un sistema de prueba se tiene una masa de 95 kg sujeta a un resorte con una constante de fuerza de 2500 N/m. El sistema se somete a una fuerza de amortiguamiento con un coeficiente de 900 kg/s.
   a) ¿Qué tipo de movimiento presenta el sistema?
   b) ¿Cuál debería ser el valor de k para que el sistema fuera críticamente amortiguado?